

FUNDAMENTOS DE LA TECNICA DE GRAFICOS DE
CONTROL DE PROCESOS POR VARIABLES,
ASI COMO ALGUNAS APLICACIONES DE
CAMPO EN EL AREA INDUSTRIAL

RAUL OBLESTER GARCIA PRINCE

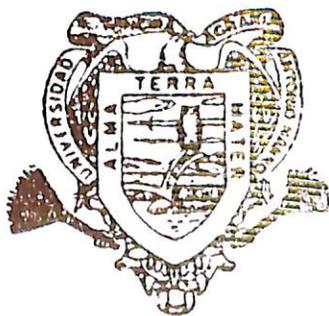
T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTADISTICA EXPERIMENTAL

Universidad Autónoma Agraria
"ANTONIO NARRO"



BIBLIOTECA



Universidad Autónoma Agraria
"Antonio Narro"

PROGRAMA DE GRADUADOS

Buenvista, Saltillo, Coah.

JUNIO DEL 2000

**Universidad Autónoma Agraria
Antonio Narro
Subdirección de Postgrado**

**FUNDAMENTOS DE LA TECNICA DE GRAFICOS DE CONTROL DE
PROCESOS POR VARIABLES, ASI COMO ALGUNAS APLICACIONES
DE CAMPO EN EL AREA INDUSTRIAL**

TESIS

Por

RAUL OBLESTER GARCIA PRINCE

Elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y
aprobada como requisito parcial para obtener el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTADÍSTICA EXPERIMENTAL**

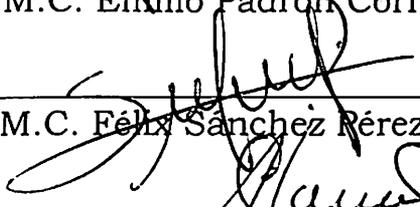
Comité Particular

Asesor principal:



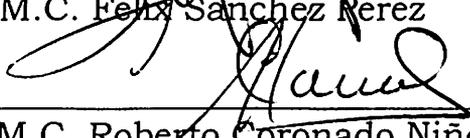
M.C. Emilio Padrón Corral

Asesor :

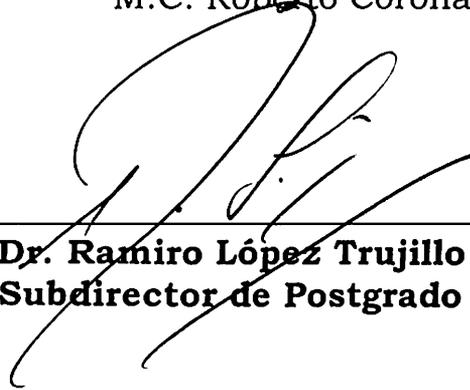


M.C. Félix Sánchez Pérez

Asesor :



M.C. Roberto Coronado Niño



**Dr. Ramiro López Trujillo
Subdirector de Postgrado**

Buenavista, Saltillo, Coah., México. Junio de 2000

DEDICATORIA

Con amor a:

Martha Beatriz

Carlos Gabriel

Raúl Rodrigo

porque juntos realizamos la meta.

A mis padres:

Marta Rita

Oblester

*algo de lo mucho que son: amor, fortaleza y
esperanza.*

Al gran amigo:

Víctor Hugo Castro Tavares.

AGRADECIMIENTOS

Con todo respeto:

A mi *Alma Mater*, la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro por permitirme formar parte de su programa de graduados.

Al COSNET, por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios.

A todos y cada uno de mis maestros, por los conocimientos que compartieron conmigo.

Al M.C. Emilio Padrón Corral por su gran apoyo, enseñanza y consejos.

A mis asesores: M.C. Félix Sánchez y M.C. Arturo Coronado. Por su gran ayuda y comprensión y por su tiempo.

COMPENDIO

Fundamentos de la Técnica de Gráficos de Control de Procesos por Variables, así como Algunas Aplicaciones de Campo en el Area Industrial

Por

RAUL OBLESTER GARCIA PRINCE

MAESTRIA EN

ESTADISTICA EXPERIMENTAL

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, JUNIO, 2000

M.C. Emilio Padrón Corral -Asesor-

Palabras clave: Gráficos de control por variables, línea central, límite de control, límite de especificación, estadístico, estimador, muestra, muestreo, proceso, media, mediana, variable.

El presente trabajo contiene una exposición de los aspectos importantes del análisis de los procesos industriales a partir del uso de la técnica de gráficos de control por variables.

El interés primordial es mostrar el sustento estadístico aplicativo en el cual se apoya esta valiosa herramienta estadística así como su

análisis, ilustración con algunas aplicaciones del campo industrial, que presentan datos reales de proceso, en distintos ámbitos de producción.

Una verdad evidente es que nunca se producen dos objetos que sean exactamente iguales. Esto implica que la idea de la variación es inherente a la naturaleza.

Para indicar las variaciones que se manifiestan en un proceso, se utiliza un método de análisis y de representación de datos conocido como gráfico de control. Es un registro gráfico de la calidad de una característica en particular que muestra si un proceso está o no estable.

Los tipos de gráficos que se pretenden analizar son:

- Medias- rangos
- Medianas- rangos
- Media- desviación estándar
- Lectura individuales
- Mid- rangos

Para cada uno de ellos se analizará su soporte teórico estadístico para la elaboración de los elementos del gráfico, así también se pretende mostrar como se aplica en la realidad y constar su gran utilidad, pero sobre todo corroborar que la estadística experimental, es un área que figura en el presente y futuro de los procesos productivos exitosos.

ABSTRACT

**Statistical Fundamentals, Review and Analysis of the Control Chart
Technic by Variables, and Some Field Applications in the Industrial
Area**

BY

RAUL OBLESTER GARCIA PRINCE

MASTER OF SCIENCE

EXPERIMENTAL STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, JUNE, 2000

M.C. Emilio Padrón Corral -Advisor-

Key words: Control charts by variables, upper control line lower control line, central Line, specification limit, statistics, population, process, mean, standard, deviation, variance, normal curve, normal probability function, mean, median, variable.

The present document contains an exposition of some important aspects (topics) of the control charts by variables. It is mainly concerned with showing the theoretical support, in mathematical and statistical means, in which this powerful tool lies, in terms of analysis, reviewing, and certain field applications that we work out in different process production areas.

Truly it is evident that we don't have two identical items. This means that the variation idea is inherent to nature.

However, to show or indicate the quality variation, it can be used as an analysis method and data representation known as control chart. It is a graphic register of quality characteristics that can show if the process is stable or not.

The graphic which we intend to analyze are:

- Mean- ranges
- Median- ranges
- Mean- Standard deviation
- Individual Lectures
- Mid- ranges

For each one of them we will analyze the theoretical and statistic support in order to make the chart's elements, also we pretend to show how these valued tools can be applied in reality and to be assure of its

The present document contains an exposition of some important aspects (topics) of the control charts by variables. It is mainly concerned with showing the theoretical support, in mathematical and statistical means, in which this powerful tool lies, in terms of analysis, reviewing, and certain field applications that we work out in different process production areas.

Truly it is evident that don't have two identical items. This means that the variation idea its inherent to nature.

However, to show or indicate the quality variation, it can be used an analysis method and data representation known as control chart. It is a graphic register of quality characteristics that can show if the process is stable or not.

The graphic which we intent to analyze are:

- Mean- ranges
- Median- ranges
- Mean- Standard deviation
- Individual Lectures
- Mid- ranges

For each one of them will analyze the theoretical and statistic support in order to make the chart's elements, also we pretend to show how these valued tools can be applied in reality and to be assure of its

powerful uses. But, must of all, to put in a solid ground that experimental statistics is a science area were successful processes are involved.

INDICE DE CONTENIDO

	Página
INDICE DE CUADROS	<i>xiii</i>
INDICE DE FIGURAS	<i>xiv</i>
I. INTRODUCCIÓN	1
Objetivo General	5
II. REVISIÓN DE LITERATURA	6
Desarrollo Histórico de los Gráficos de Control	8
III. EL PAPEL DE LAS HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS EN LA ADMINISTRACIÓN DE LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN	12
El Diagnóstico	12
La Información	13
Análisis Estadístico	14
Algunos Criterios para Decidir el Tipo de Medidas por Variables.....	16
Población y Muestra.....	17
La Recolección de Datos	18
La Organización de los datos.....	18
IV. INFERENCIA A LA TEORICA ESTADÍSTICA	24
Distribuciones	24
Distribución Normal.....	24
Teoremas Importantes	39
Teorema de Tchebycheff.....	39
Teorema Central del Límite.....	42
Pruebas de Hipótesis	47
Función de Operación Característica (OC)	49
V. MUESTREO EN EL PROCESO	58
Muestreo a Partir de una Distribución Normal	58
Muestreo a Partir de la Distribución t	60

Muestreo a Partir de la Distribución F	61
VI. LOS GRÁFICOS DE CONTROL	63
Introducción a los Gráficos de Control	63
¿Qué son los Gráficos de Control?.....	64
¿Cómo Funciona un Gráfico de Control?.....	65
Fundamentos y Consideración de los Gráficos de Control	65
VII. LOS GRÁFICOS DE CONTROL POR VARIABLES	68
Tipos de Gráficos de Control	68
Principios Generales de los Gráficos de Control	70
Principios Comunes para los Gráficos de Control	74
Gráficos de Control y Límites de Especificación	74
VIII. CONTROL DEL PROCESO CON GRÁFICOS DE CONTROL	78
Característica de Control	78
Determinación del Límite de Control	78
Revisión de los Límites de Control	79
Estándares de Operación	79
Comparación con Especificaciones	81
Gráficos de Control y Límites Unidimensionales de Especificaciones	85
Continuidad en el Empleo de Gráficos de Control	86
Juicio Estadístico	86
Expresión Cuantitativa de las Distribuciones.....	91
Las Medidas de Tendencia Central.....	91
Las Medidas de Dispersión.....	91
Acerca de la Distribución de Frecuencia.....	91
Prueba de Hipótesis y Gráfico de Control	94
Un Factor Importante para el Uso del Gráfico de Control; Su Diseño	98
Consideraciones para el Diseño.....	98
Selección de Límite de Control.....	98

Tamaño Muestral y Frecuencia de Muestreo.....	99
Subgrupos Racionales.....	100
IX. ANALISIS ESTADISTICO E ILUSTRACIÓN DE LOS	
GRAFICOS DE CONTROL POR VARIABLES.....	102
Clasificación de los Gráficos de Control	
por Variables.....	102
Gráfico X - R.....	104
Gráficos de Control Medias Rangos.....	115
Gráficos de Control Media - Desviación Estándar.....	142
Gráfico de Control para Unidades Individuales.....	157
Gráficos Mid- Rangos (M).....	169
Tópicos Complementarios Inherentes a los	
Gráficos de Control.....	172
X. APLICACIONES DIVERSAS DE CAMPO DE LOS	
GRAFICOS DE CONTROL POR VARIABLES.....	195
CONCLUSIONES	225
LITERATURA CITADA.....	227
APÉNDICE.....	230

INDICE DE CUADROS

		Página
10.1	Datos proceso de teñido de tela.....	195
10.2	Datos de la característica de calidad proceso mecánico.....	198
10.3	Datos de la característica espesor de pintura en placa	201
10.4	Datos del proceso de la industria textil	204
10.5	Datos del proceso químico.....	208
10.6	Datos del proceso de la planta de lácteos.....	209
10.7	Datos del proceso de soluciones ácidas.....	213
10.8	Datos del proceso de productos electrónicos.....	214
10.9	Datos del proceso de dinamita.....	218

INDICE DE FIGURAS

	Página
4.1	Ejemplo del teorema del límite central 44
4.2	Comparación de la distribución de la media y una variable 46
4.3	Representación gráfica de tres puntos de una muestra normal 50
4.4	Grafica de la función $L(\mu)$ 51
7.1	Patrón mezclado para un grafico \bar{X} 72
7.2	Distribución con diferentes medias y modas iguales..... 73
7.3	Proceso que se comporta normal, centrado y bajo control... 75
7.4	Variación no restringida a un intervalo pequeño 75
7.5	Proceso donde coinciden casi limites de control con los de especificación 76
7.6	Situación de proceso inestable 76
8.1	Flujo de decisión de líneas de control 80
8.2	Comparación de gráficos de control con las especificaciones... 83
8.3	Representación gráfica de los valores de 20 muestras de 5 elementos cada una 84
8.4	La distribución normal con sus probabilidades 88
8.5	Hay dos distribuciones normales en el proceso 89
8.6	Tabla de espesor de las planchas de acero 92
8.7	Tabla de distribución de frecuencias 92
8.8	Diagrama de control para el diámetro de anillos 95
8.9	Como funciona la gráfica de control 96
8.10	Curvas características de operación 99
9.1	Representación gráfica de puntos de control 111
9.2	Cuatro brincos en el nivel de un proceso 125

9.3	Tendencia en el nivel de un proceso	126
9.4	Ciclos recurrentes en un proceso	127
9.5	Alta proporción de puntos cerca de límites	128
9.6	Falta de variabilidad en los puntos de una carta de control.....	129
9.7	Gráficos de X -R (FORD)	131
9.8	Gráficos de X -R datos de arranque (FORD)	132
9.9	Gráficos de X -R de estado inicial (FORD)	133
9.10	Gráficos de X -R con límites de control (FORD)	134
9.11	Gráficos de control de mediana	140
9.12	Gráficos de control de interpretación de la mediana.....	140
9.13	Gráficos de control por variables	141
9.14	Colección de datos (Proceso de pintura)	154
9.15	Gráficos de X -S (FORD)	155
9.16	Control de gráficas por variables	156
9.17	Valor de tabla para los constantes D_3 , D_4 , E_2	165
9.18	Gráficos individuales	166
9.19	Gráficos de interpretación de lecturas individuales y mid- rangos.....	167
9.20	Ubicación de las líneas de precontrol	173
9.21	Diagrama de suma de corridas.....	177
9.22	Diagrama de control de media y media móvil	178
9.23	Gráfico de un proceso normal	179
9.24	Estado totalmente controlado	180
9.25	Fluctuación grande y repentina del promedio de un proceso.....	181
9.26	Fluctuación grande y repentina de la dispersión	181
9.27	Fluctuación grande y repentina de la dispersión	182
9.28	Cambio sostenido del promedio de un proceso	183
9.29	Cambio grande y aleatorio del promedio de un proceso ..	184
9.30	Aumento de la dispersión de un proceso	186
9.31	Combinación de datos procedentes de poblaciones	

con tres distribuciones muy diferentes	187
10.1 Gráfica de promedios y rangos	197
10.2 Gráfica de rangos.....	199
10.3 Gráfica de medianas	195
10.4 Gráfica de desviaciones estándar	202
10.5 Gráfica de promedios	203
10.6 Límites de control (Industria Textil)	206
10.7 Gráfica de línea central	208
10.8 Gráfica de rangos	211
10.9 Gráfica de lecturas individuales	212
10.10 Gráfica de límites de control	215
10.11 Límites de control (Planta de Dinamita)	219
10.12 Límites de control (Planta de Dinamita)	220

I. INTRODUCCION

Hoy en día, dada la globalidad en la comercialización de productos y/o servicios, cada vez es más apremiante el poder garantizar la competitividad de las empresas de cualquier índole, apoyándose ampliamente en los conceptos de productividad y calidad. Estas palabras encierran en sí, un gran trabajo, arduo, de conjunto, donde todos los personajes de la escena productiva, son responsables de los resultados que se pretenden, que son los de satisfacer a un nicho determinado de clientes. Es pues, que el bienhacer de un proceso en particular implica el hacer bien las cosas, es el actuar de una manera tal, que sea una forma de conducta, es entonces conceptualizar, que la calidad de un proceso, de productos o servicios, no es una moda, es una forma de vida; y México, en su realidad productiva, no es la excepción. En la medida que gradualmente se dan los cambios conductuales, se estandariza una actitud adecuada.

Los individuos que al obtener una actitud adecuada (el cambio), podrán visionar, que su empresa con la que se encuentran comprometidos, pueda mejorar hacia niveles que le garantizan esa permanencia en los mercados; para ello requiere de aptitudes y

habilidades que le permitan lograr esos objetivos. El control de calidad, provee de estas metodologías, técnicas y herramientas, que en su buen uso, son un elemento sustantivo de cambio hacia la calidad deseada.

La nueva concepción del control de calidad fue desarrollada en Japón y enriquecida y adaptada en occidente, ahora se le llama: *control total de calidad* (CTC), que se define como "un sistema eficaz para integrar esfuerzos en materia de desarrollo, mantenimiento y mejoramiento de la calidad" realizados por los diversos grupos en una organización de modo que sea posible producir bienes y/o servicios a los niveles más económicos y que sean compatibles con la plena satisfacción del cliente.

El CTC exige del compromiso e involucramiento de todas las partes que componen la organización; y parte del hecho de que la calidad del producto o servicio final, es el resultado del funcionamiento correcto de toda la organización.

El reto de las organizaciones es: lograr una transformación ordenada y sistemática en el estilo de administración, y en la forma de lograr la calidad que nos lleve a la participación de todos en la mejora de calidad total de la empresa.

El cómo llevar a cabo esta transformación ha sido preocupación de destacados aportadores de propuestas: Deming (1989), Juran (1974),

Ishikawa (1986), Feigenbaum (1983) y Crosby (1984), (cuya filosofía se centra en el hombre como el elemento importante y en el buen uso del pensamiento estadístico aplicado a la mejora de los procesos). Cada una de estas propuestas se han complementado entre sí; estas aportaciones se han visto robustecidas por los trabajos de Taguchi (1986), Kume (1993), Montgomery (1991), todos ellos en el ámbito de la estadística aplicada para la mejora sin que aún se halla cerrado el capítulo creativo en este renglón.

El control total de calidad está formado por:

- La planeación para la calidad
- La administración para la calidad
- El control de la calidad
- El aseguramiento de la calidad

El control total de calidad (CTC) contempla el uso de herramientas básicas (7HB's) estadísticas que contrastan su sencillez en su uso, con sus potentes alcances en el campo productivo, dado que, según Ishikawa (1986) permiten resolver el 95 por ciento de los problemas en la empresa.

Las siete herramientas estadísticas (7 Hs) son una gran ayuda en ciertas situaciones para:

- Descubrir o encontrar problemas.

- Entender situaciones dadas.
- Detectar las causas de los problemas.
- Analizar los efectos y las causas.
- Comprobar si ciertos factores son causantes de problemas.
- Ser objetivos.
- Expresar los hechos en forma de datos ordenados.
- Determinar anomalías en el proceso.
- Controlar los efectos vitales.
- Analizar de manera lógica, sistemática y ordenada las desviaciones de calidad.
- Confirmar el efecto de las acciones formadas.
- Mantener el efecto de las mejoras.

Los 7H's de referencia son:

- Histograma.
- Diagrama de Pareto.
- Diagrama de causa efecto.
- Estratificación.
- Diagrama de dispersión.

- Gráficos de control.
- Hoja de registro.

De todos ellos, el cometido en este trabajo son: los gráficos de control por variables, presentar su argumentación estadística, ilustrar su desarrollo, sus criterios de aplicación, así como su manejo en algunas aplicaciones reales de campo en distinto ámbito productivo.

Objetivo General

El propósito principal de este documento deberá ser el de presentar e ilustrar los gráficos de control por variables, como una herramienta estadística útil en el monitoreo de un proceso productivo, eficaces elementos para el análisis de problemas y con ello, la adecuada toma de decisiones.

A través de estos procedimientos y demostraciones, el lector podrá tener un claro y objetivo entendimiento de esta herramienta de gran uso en los procesos industrial: el gráfico de control.

II. REVISION DE LITERATURA

Los métodos estadísticos son herramientas eficaces para mejorar y controlar los procesos productivos, sin embargo, es necesario tener un amplio y adecuado criterio, así como un (suficiente) conocimiento del proceso de producción, sin este triángulo, estas herramientas, desmerecen su valor:

Actitud- Aptitud- Conocimiento del Proceso

Un aspecto importante es el considerar que toda desviación de la calidad pretendida de un producto o servicio, se puede resolver, eliminando las causas que promueven dicho efecto; así las herramientas estadísticas dan objetividad y precisión a las observaciones que se hagan del proceso.

Otros criterios importantes a considerar, pueden ser los siguientes (Kume, 1993):

- Dar importancia a los hechos, no a lo subjetivo.
- Expresar los hechos con valores medibles, no con sentimientos ni ideas.

- Utilizar a la observación para encontrar en la información el error y la variación.
- Considerar que el común de los procesos productivos se componen de acuerdo a una, de distribución normal (dado un gran número de observaciones).

También debe considerarse que en todo proceso productivo participan cinco factores que pueden influir en el error o desviación (Ishikawa, 1994):

- a)- La materia prima.
- b)- La metodología.
- c)- La maquinaria (equipo) y/o materiales.
- d)- El medio ambiente.
- e)- La mano de obra.

Este último, es el elemento intangible y por ello, se presenta como el reto sustantivo a control, en términos de adecuado desempeño, de eficacia y eficiencia, derivados de una adecuada actitud.

El concepto de calidad por si solo no muestra un sentido lógico sino subjetivo, pero se considera como una nueva cultura educativa, referida a lograr las expectativas de la gente (clientes) y puede ser sin

duda, un elemento relevante en el progreso y bienestar de un país, si el individuo clarifica el hacer bien y el bien hacer, no sólo a la primera vez, sino en toda ocasión.

El control de calidad contempla el manejo adecuado de la calidad deseada, que es el mantener el aseguramiento continuo y constante de alcanzar un producto o servicio de alta calidad que vaya a satisfacer las necesidades de un cliente en particular.

Desarrollo Histórico de los Gráficos de Control

Se pretende hacer un recorrido a través de lo que ha sido el amplio camino del desarrollo de la estadística en la calidad de los procesos productivos, enfocándose a las herramientas para su control.

La necesidad de que algunos instrumentos fueran suficientemente confiables, lleva a la Compañía General Electric, a establecer un convenio con la compañía Bell, American Telephone and Telegraph Company. En 1882, con ello empieza a surgir el control de calidad y su aseguramiento, concretamente en el hecho de inspeccionar el proceso de una manera meticulosa (inspección al 100 por ciento) (ATyT, 1956).

En 1907 se organiza y forma el Departamento de Calidad, el cual establece en el proceso de manufactura un sistema de inspección de materia prima y productos, en esa época, las técnicas estadísticas eran muy escasas y poco objetivas en su uso. El muestreo era exhaustivo y se

hacían grandes esfuerzos para acercar la conformación a los requerimientos de los productos.

El término utilizado por el control de calidad era el de "promedio del proceso", porcentaje de defectos permisible, riesgo del consumidor; el concepto de error de muestreo aparece hasta fines de 1920.

Para 1922, a la inspección se le denominó rutina de chequeo (o chequeo de rutina), aplicándose los términos de las líneas de producción; sin embargo cada vez más complicado en razón de que el diseño en la tecnología avanzaba a grandes pasos, incorporando dispositivos electrónicos más complejos en su operación, su instalación y mantenimiento, eso llevó a la necesidad de hacer un gran número de inspecciones, estableciéndose el lema "hazlo bien a la primera vez" que 60 años después fue retomado en la batalla para incrementar la productividad (Banks, 1989).

Shewhart (1925) en la Compañía Bell de telefonía reconfigura un Departamento de Calidad con un grupo de técnicos conocedores de la estadística, entre ellos, Dodge y Roming, (1959) ellos fueron los fundadores del Control de Calidad, basándose en el uso de gráficas y el empleo de métodos del cálculo simplificado, a ellos se unieron Deming (1989) y Ashcroft *et al.*, (1980).

Este equipo de ingenieros escribió el primer libro sobre muestreo estadístico, publicado en 1932 y cuyas tablas son válidas hasta el día de hoy. Aunque en 1916 en los Laboratorios Bell surgen las primeras tablas de muestreo, es hasta 1929 que son publicadas por la revista "Bell System Technical Journal", (Fegan, 1974).

En 1926, Jones, establece las bases de las funciones del Departamento de Control de Calidad en Líneas de Producción.

Las gráficas de control desarrolladas por el Dr. Shewhart en 1924, provocan la pregunta ¿Cuál debe ser la frecuencia del muestreo? .

En 1926 se incorpora al equipo un brillante ingeniero, J.M. Juran, así también destaca la participación de B. Small, quien elaboró posteriormente para la Western Electric (ATyT) el Manual Statistical Quality Control Handbook en 1956.

De 1925 a 1941, el desarrollo del control de calidad y su aseguramiento fue sorprendente.

Shewhart (1925) aporta el documento "The Application of Statistics as an aid in the Maintaining Quality of Manufactured Product", a través del Journal of the American Statistics Association, es ahí donde se introduce el concepto de gráfico de control; también en 1925, Dodge elabora las bases para el muestreo por atributos,

observándose el "riesgo del consumidor" y al riesgo del producto como errores tipo I y II respectivamente.

En el transcurso de la Segunda Guerra Mundial la Calidad de los artículos requería personal especializado, como resultado de esto, los programas de entrenamiento se establecieron por iniciativa del Gobierno de los Estados Unidos. Estos cursos se enfocaron al uso del Control Estadístico de Calidad (C.E.C.), en la industria, con tópicos como muestreo por aceptación y los gráficos de control. En los próximos 25 años, este instrumento vendría a ser una herramienta valiosa y plenamente usada en todo el mundo moderno, hasta la actualidad (Small, 1956).

Un personaje importante que asesoró al ejército americano durante la Segunda Guerra fue el Dr. E. Deming (1989), años después fue reconocido por sus trabajos en Japón (Postguerra), instituyéndose en ese país el premio más alto en calidad en honor suyo; Deming además (Dr. en Estadística) fue uno de los pilares del Programa de Difusión y Capacitación que en esa época se desarrolló en los E.U.A.

En julio de 1942 se consolida el grupo que sería el staff más completo y brillante de estadísticos, quienes desarrollaron importantes trabajos sobre el análisis secuencial, análisis multivariado en el Control de Calidad, la T^2 de Hotelling (1947) y técnicas del análisis estadístico, entre otros.

III. EL PAPEL DE LAS HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS EN LA ADMINISTRACIÓN DE LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN

Existen casos particulares para que de un proceso resulte un producto defectuoso, la manera en que se puede eliminar, es descubriendo esas causas.

Se tiene la equivocada creencia de que dado que las tolerancias y especificaciones de elaboración de productos hoy día, son muy estrictas, la existencia de productos defectuosos es inevitable.

La causa universal de defecto es la variación en los materiales, condiciones de la máquina, en los métodos, en la materia prima, pero sobre todo, en la mano de obra, en estos cinco factores podemos decir, que se encuentran ubicadas las causas de defectos, también podemos decir que, dada la participación de estos factores, con distinto grado de incidencia, es prácticamente imposible, elaborar productos idénticos entre sí.

El Diagnóstico

Las innumerables causas de defectos pueden categorizarse en vitales y triviales, entonces empíricamente se puede aceptar que existen pocos vitales de gran efecto en el proceso y muchos triviales que hacen

mucho ruido en el proceso. Así, una buena estrategia es identificar esos pocos vitales que se manifiestan en productos defectuosos.

El proceso de encontrar las causas de los productos defectuosos se llama Diagnóstico del Proceso.

El proceso de cómo diagnosticar puede hacerse empíricamente, intuitivamente, sin embargo de una manera sistemática se puede hacer utilizando el análisis estadístico de datos, pues es un método eficaz para la observación y análisis de datos de manera objetiva.

Concluiremos que los métodos estadísticos proporcionan un medio eficaz para desarrollar una nueva tecnología y controlar la calidad en los procesos, por lo que su conocimiento se debe convertir en rutina de capacitación de un técnico o ingeniero, a esto se le debe incorporar como elemento importante, la habilidad para analizar las cosas desde el punto de vista estadístico; aunado a una actitud mental (de valores) , y un conocimiento del proceso mismo, suficiente.

La Información

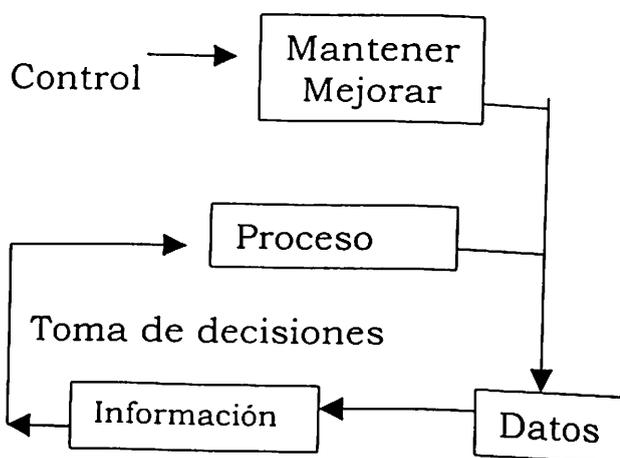
La Razón de Obtener Datos

Uno de los conceptos primordiales del C.T.C. enfatiza en que el análisis de un proceso productivo cualesquiera, debe hacerse en base a datos y hechos, ello disminuye emitir juicios equivocados para la toma

de decisiones. Estas conductas representan un enfoque sistemático en la Estadística.

Si la Estadística es la ciencia que se encarga de recopilar, integrar, organizar, representar y analizar un conjunto de datos, con el fin de inferir sobre la información contenida en ellos, entonces es de vital importancia su revisión dado que de ahí derivará el uso correcto de las gráficas de control, herramienta que deseamos ilustrar.

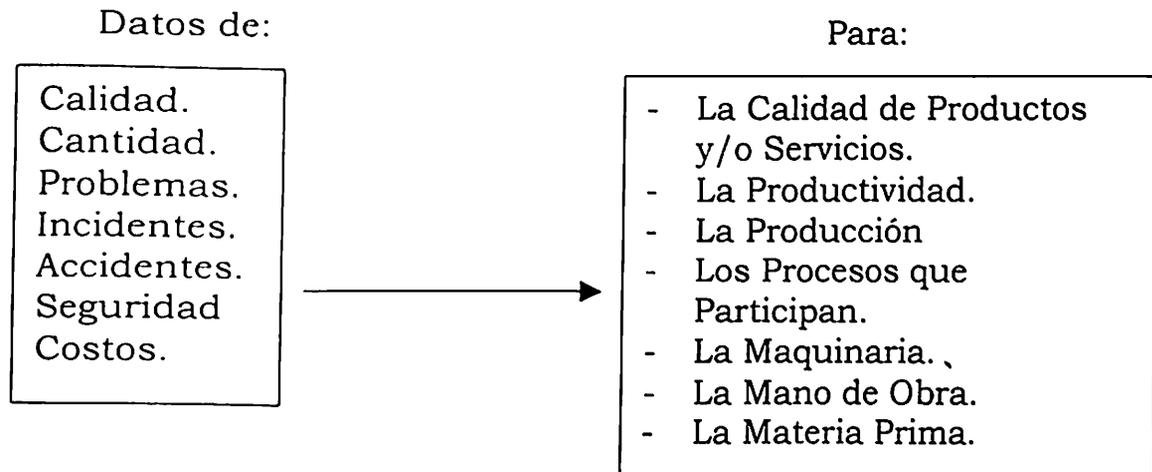
Mediante la siguiente figura podemos mostrar el flujo de actividades que conducen al control de un proceso, esto es mantenerlo o mejorarlo. (Sherkenbaich, 1990).



Análisis Estadístico

Los datos que en una empresa se obtienen del proceso, se pueden ordenar, su análisis nos permitirá comprender si el proceso es sano,

como lo podemos mantener así, o bien, como lo podemos mejorar. Los datos pueden ser:



Sin embargo es necesario tener la concepción adecuada de la Información, por lo que los objetivos que debemos enfocar con esta actividad son:

- A) Investigar desviaciones respecto a la planeado.
- B) Investigar el tipo y frecuencia de fallos y/o defectos (Desviaciones de Calidad).
- C) Investigar cambios a través del tiempo.
- D) Investigar las causas que generan las desviaciones.

Las condiciones que se deben obtener:

- A) El objetivo de la relación de datos y en donde se obtendrá
- B) Tener un expediente del:

<i>Qué</i> <i>Porqué</i> <i>Cuándo</i> <i>Dónde</i> <i>Cómo</i> <i>Conqué</i>	\Rightarrow <i>Datos</i>
--	----------------------------

Podemos decir que cualquier avance pretendido en el control de calidad (C.C) dependerá de nuestro desempeño en cuanto a los métodos de medición, desde el punto de vista estadístico y técnico. Para investigar los métodos de medida se tienen que cumplir los siguientes puntos:

- Idear formas de cuantificación.
- Orientar las medias a la inspección, el control del proceso o su mejora.
- Investigar si para el caso las medidas más apropiadas son por variables o por atributos.

Algunos Criterios para Decidir el Tipo de Medidas por Variables:

- Las medidas por variables proporcionan mayor información, por lo que son mejores para el análisis.
- Frecuentemente, es conveniente utilizar medidas de variables hasta que el proceso está bajo control.

- Cuando la variación es muy grande y el error de muestreo también, debemos aumentar el tamaño de muestra.
- Para mostrar el estado global del proceso de manera más objetiva, esta medida no es muy ventajosa.

Población y Muestra

Estadísticamente, podemos estudiar una población (N) a través de una muestra de ella (n) donde la selección de sus elementos debe ser aleatoria, la muestra además debe ser representativa de la población.

El muestreo, es el hecho de tomar muestras de una población, sus características deben ser:

- Idoneidad. - Rapidez.
- Precisión. - Inssegado.
- Económico. - Confiable.

Dado que las mediciones no se harán de toda la población, debemos incorporar el error de muestreo, que representa la variación. Consecuentemente también existirá un error de medición, el cual deberá mantenerse en un valor suficientemente pequeño y controlado.

El error de medición puede ser de:

- **Sesgo:** Es la diferencia entre el valor promedio de muchas mediciones repetidas y el valor verdadero de la cantidad medida.

- **Precisión:** Es el grado en que repetidas mediciones dan el valor verdadero de medición respecto a un parámetro de referencia.

Tipos de Datos:

Estos pueden ser:

- **Medibles.-** Datos en cantidades, continuos (tiempo, velocidad, temperatura, pH, etc.).
- **Contables:** Datos discretos (discontinuos) (trabajadores, causantes por semana, accidentes por semana, etc.).

La Recolección de Datos

Un correcto estudio estadístico empieza con una recolección adecuada de datos, para ello se debe ser precavidos.

- a)- Es necesario registrar fielmente los datos.
- b)- Efectuar las mediciones con el menor error posible (sobre todo si son datos continuos).
- c)- Utilizar instrumentos de medición bien calibrados.
- d)- Utilizar instrumentos de medición adecuadamente.

La Organización de los Datos

Es conveniente recordar que para la revisión de los gráficos de control es necesario el manejo del lenguaje en el sentido de tener una

concepción precisa del significado de los términos usados, por lo que a continuación se presentan los siguientes:

Población = Conjunto de mediciones de una variable, tomadas sobre todos los individuos que en ella se encuentran

Muestra = Es un conjunto de mediciones que constituyen parte de una población y a partir de ella obtenemos información para hacer inferencia hacia el universo.

Variación = Diferencia que se presenta entre un elemento u otro de la población.

Muestra Aleatoria = Es aquella donde cualquiera de los elementos de la población tiene la misma posibilidad de participar en ella.

Toma de Datos = Recolección de información para ser ordenada.

Distribución de Frecuencias = Cuando se tiene un gran número de datos, es útil distribuirlos en clases o categorías y determinar el número de datos perteneciente a cada clase.

Variables = Las características que pueden medirse en un determinado artículo o bien el número de artículos que satisfacen las especificaciones preestablecidas.

Variable Discreta = Es aquella que toma una cantidad numerable de valores distintos.

Variable Continua = Es aquella que puede tomar cualquier valor de entre todos los contenidos en un intervalo.

Consistencia= Que se puede predecir confiablemente el comportamiento futuro del proceso.

Proceso bajo Control = Cuando se tienen productos que varían consistentemente en el tiempo dentro de un rango previsto.

Causas Vitales = Aquellos que generan desviaciones sustanciales en el proceso y lo sacan de control.

Causas Triviales = Aquellas que independientemente de su frecuencia, no afectan el control del proceso.

De la observación de un proceso, se pueden obtener datos que pueden ayudar a predecir que sucedería en él, como no será costoso (ni objetivo), checar todos, entonces se opta por obtener una muestra de esa población del proceso, que sea suficiente (ya se comentaron sus características), para poder a través de ella, estimar correctamente.

La forma más común de organizar datos es utilizando las tablas de frecuencia, que consiste en ordenarlos a fin de analizarlos.

Los datos los podemos medir pero tendrá que ser con respecto a algo, para que puedan tener sentido las observaciones que se hagan de ellos.

Estas medidas son:

- Medidas de tendencia central.

- Medidas de dispersión.

Cuando tenemos un conjunto de datos y estos los podemos agrupar en torno a un dato central que en cierto modo representa al conjunto, este se denomina como la media aritmética \bar{X} .

Para tener una idea clara de la manera como se relaciona los datos entre si, no es suficiente identificar su tendencia central, es necesario además de examinar que tanto difieren entre si es decir, que grado de dispersión existe entre ellos, con respecto a los parámetros de referencia.

Las medidas de dispersión son la desviación estándar y la varianza.

Recordemos que la desviación estándar muestral (S) es la raíz cuadrada positiva de la varianza muestral

$$S = \sqrt{S^2}$$

donde la varianza muestral (S^2) es la varianza de una muestra aleatoria de tamaño n, entonces

$$S^2 = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}{n(n-1)}$$

Ahora bien, por definición:

Si X es una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ , la varianza de X es:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (X - \mu)^2 f(x)$$

si X es discreta y:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x) dx$$

donde:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ es la desviación estándar de X en el entendido que para una población se tienen la desviación estándar σ y S para la muestra; así también σ^2 la varianza de la población y S^2 para la muestra.

Ahora bien; si se considera una muestra de tamaño n de una población normal con varianza σ^2 y se calcula la varianza muestral S^2 , se obtendrá un valor del estadístico S^2 , que será una estimación puntual de σ^2 .

Se puede establecer una estimación por intervalos de σ^2 utilizando el estadístico:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Si X^2 tiene una distribución ji-cuadrada con $(n-1)$ grados de libertad, al elegir muestras de una población normal, entonces:

$$P(X_{1-\alpha/2}^2 < X^2 < X_{\alpha/2}^2) = 1 - \alpha$$

donde $X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ y $X_{\frac{\alpha}{2}}^2$ son valores de la distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad que delimitan las áreas $1 - \frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\alpha}{2}$

Sustituyendo X^2 por su valor se tiene:

$$P\left\{X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < X_{\frac{\alpha}{2}}^2\right\} = 1 - \alpha$$

Resolviendo:

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{X_{\frac{\alpha}{2}}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}\right\} = 1 - \alpha$$

Para una muestra aleatoria tamaño n , se calcula la varianza de la muestra S^2 y resulta el intervalo $(1-\alpha)$ 100 por ciento para σ^2 .

IV. INTERFERENCIA TEORICA ESTADÍSTICA

Es conveniente que quien de comprender el origen de las expresiones que permiten calcular valores de un proceso, la estimación de los parámetros que participan en el análisis, el desarrollo de dichas expresiones, estudie las bases teóricas que son la inferencia estadística, este nivel de conocimiento se contempla en este documento, pero también, si solo se desea el nivel de usuario , entonces habrá que dirigirse al capítulo de aplicaciones.

Por lo anterior, en este capítulo se tratara de revisar aquellos tópicos de la teoría estadística necesarios para fundamentar las expresiones que permiten los cálculos y estimaciones, y que será solo aquellos que corresponden para los gráficos de control por variables.

Distribuciones

Distribución Normal

La distribución normal de probabilidad continua mas importante en la estadística, es la normal y dado que la mayor parte de los procesos productivos se comparten de acuerdo a ella, en este documento donde el uso de la herramientas grafico de control. (Wade y Woodall, 1993) es

aplicado a los procesos de producción, pues entonces se dedicará gran parte de este capítulo a su revisión, como elemento importante en la sustentación teórica de esta tesis.

También se le conoce a la distribución normal, como distribución gaussiana quien dedujo la ecuación a partir del estudio de errores cometidos en mediciones repetidas de la misma cantidad.

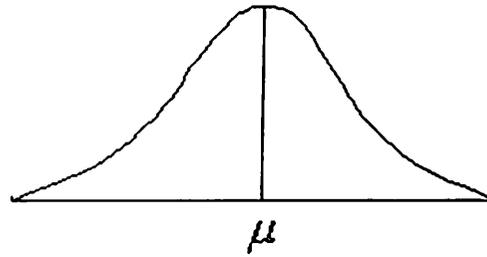
Una variable aleatoria continua X que tiene la distribución en forma de campana, se le llama variable aleatoria normal; la ecuación de la distribución de probabilidad de la variable normal depende de los parámetros μ y σ , su media y su desviación estándar respectivamente, por tanto se designan los valores de la función de densidad de X por $n(X; \mu, \sigma)$.

La función de densidad de la variable aleatoria normal X con medida μ y varianza σ^2 , es:

$$n(X; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{X - \mu}{\sigma} \right]^2} \quad (\text{Ec. 4.2})$$

$$-\infty < X < \infty$$

Una vez que se conoce μ y σ , la curva queda definida:



En la curva anterior comprende que el área total bajo la curva de probabilidad es igual a 1; esto implica que entre mayor variabilidad haya en un proceso (en cuanto a sus observaciones), la curva está más achatada.

Propiedades de la Curva Normal

- La moda ocurre cuando $\chi = \mu$
- La curva es simétrica respecto a un eje vertical que pasa por la media μ .
- La curva tiene sus puntos de inflexión en $\chi = \mu \pm \sigma$; es cóncava hacia abajo si $\mu - \sigma < \chi < \mu + \sigma$, es cóncava hacia arriba en caso contrario.
- La curva normal se aproxima en forma asintótica al eje horizontal, a medida que avanza en uno u otro sentido a partir de la media.
- El área total bajo la curva y por encima del eje horizontal es igual a 1.

Demostración

Evaluamos la media a partir de la esperanza matemática.

$$E(X) = \frac{1}{\sigma \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Por cambio de variable:

$$Z = \left[\frac{x - \mu}{\sigma} \right] \text{ y } d\chi = \sigma dz$$

Se obtiene:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E(X) = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Dado que:

$$\mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mu$$

Por lo tanto:

$$E(X) = \mu \quad (\text{Ec. 4.2})$$

En el caso de la varianza de la distribución normal esta dado por:

$$E[(\chi - \mu)^2] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int (\chi - \mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\chi - \mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Haciendo ahora el cambio :

$$Z = \left[\frac{\chi - \mu}{\sigma} \right]; \quad \chi = \mu + z\sigma \quad \text{y} \quad d\chi = \sigma dz$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = z \quad dv = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$E[(\chi - \mu)^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$E[(\chi - \mu)^2] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} -z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

$$E[(\chi - \mu)^2] = \sigma^2(0+1)$$

$$E[(\chi - \mu)^2] = \sigma^2 \quad (\text{Ec. 4.3})$$

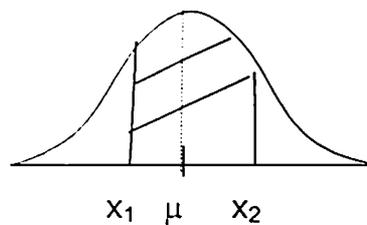
Por lo que podemos decir que los parámetros μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución normal.

Áreas Bajo la Curva:

Si se piensa en un proceso productivo que se comparte de acuerdo a una distribución de probabilidad continua o función de

densidad, cuya curva es la normal, se pretenderá que el problema de que el proceso sea "exitoso" en términos de calidad de productos o servicio deseado, estará en el hecho de que una variable aleatoria tome valores entre dos valores límite, por ello es también importante el analizar este aspecto.

Si tenemos:



El área bajo la curva limitada por X_1 y X_2 es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor entre $X = X_1$ y $X = X_2$; en el caso de la curva normal:

$$P(\chi_1 < X < \chi_2) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} n(\chi; \mu, \sigma) d\chi$$

$$P(\chi_1 < X < \chi_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\chi-\mu}{\sigma}\right]^2} d\chi$$

Recordemos que la curva normal depende de la media y la desviación estándar de la distribución en cuestión; por lo que el área bajo la curva entre dos ordenados, también depende de μ y σ .

$$\text{La transformación } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (\text{Ec. 4.4})$$

Es muy útil dada la complejidad en la resolución de integrales de funciones de densidad normal; por lo que la transformación anterior implica que se puede transformar todas las observaciones de cualquier variable aleatoria normal X en otro conjunto de observaciones de una variable aleatoria normal Z con media = 0 y varianza = 1

Siempre que X tome un valor χ

donde:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Por tanto si X cae entre $\chi = \chi_1$ y $\chi = \chi_2$ la variable aleatoria caerá entre los valores Z_1 y Z_2 :

$$Z_1 = \frac{\chi_1 - \mu}{\sigma}$$

$$Z_2 = \frac{\chi_2 - \mu}{\sigma}$$

Por lo anterior :

$$P(\chi_1 < X < \chi_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

$$P(\chi_1 < X < \chi_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (\text{Ec. 4.5})$$

$$\int_{z_1}^{z_2} n(Z;0,1)dz = P(Z_1 < Z < Z_2) \quad (\text{Ec. 4.6})$$

donde Z es una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.

Distribución Normal Estándar (Walpole y Myers, 1982)

Definición: La distribución de una variable aleatoria normal con medida cero y varianza uno se llama distribución normal estándar.

Si se considera el Teorema de Chebyshev, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor dentro de tres desviaciones estándar de la media es:

$$Z_1 = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} = -3$$

$$Z_2 = \frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma} = 3$$

Por lo tanto:

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \quad (\text{Ec. 4.7})$$

$$= P(-3 < Z < 3)$$

$$= P(Z < 3) - P(Z < -3)$$

$$= 0.9987 - 0.0013$$

$$= 0.9974$$

En términos de porcentaje, sería el 99.74 por ciento que representa todo el área propiamente bajo la curva normal, y en esa área estará los valores poblacionales.

Donde: $X_1 = \mu - 3\sigma$ y $X_2 = \mu + 3\sigma$

El valor obtenido corresponde a una probabilidad mas fuerte que la expresada por el teorema de Chebyshev.

Las probabilidades asociadas a experimentos binomiales, cuando el número de ensayos "n" es pequeño, se obtiene con facilidad de la formula $b(X; n, p)$ que representa la distribución de una variable aleatoria binomial (X número de éxitos en n ensayos) y que desde luego esta expresión $b(X; n, p)$, se la otorga a la distribución binomial.

Aproximación de la Distribución Normal a la Binomial

Un teorema que permite usar áreas bajo la curva normal para aproximar probabilidades binomiales cuando "n" es suficientemente grande, es el siguiente:

Teorema: Si X es una variable aleatoria con media $\mu = np$ y varianza $\sigma^2 = npq$ entonces la forma límite de la distribución es:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad (\text{Ec. 4.8})$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ esta se aproxima a una distribución normal estándar (0,1).

La distribución normal con $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$.

Donde:

p = probabilidad de éxito

$q = (1-p)$, probabilidad de fracaso

No solo proporciona una aproximación muy exacta a la distribución binomial cuando n es muy grande y p , no está muy cerca a 0 o a 1, sino que también proporciona una aproximación bastante aceptable, aun cuando n sea pequeña y p razonablemente cercana a $1/2$.

La desviación estándar mide la distancia en la escala horizontal, asociada a los límites de contención que para $\mu \pm \sigma$ serán 68.26 por ciento, para $\mu \pm 2\sigma$ serán 95.46 por ciento, esto ya se mostró de donde resulta al ilustrar el caso del límite $\mu \pm 3\sigma$, que resultó ser 99.73 por ciento.

La Distribución Normal Acumulativa

La distribución normal acumulativa se define como la probabilidad de que la variable normal X sea menor que o igual a algún valor "a". Esto es:

$$P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\text{Ec. 4.9})$$

haciendo un cambio de variable:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Evaluamos independiente μ y σ^2

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \int\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{Ec. 4.10})$$

donde \int es la función acumulativa de la distribución normal estándar .

Al convertir la variable aleatoria $N \sim (\mu, \sigma^2)$ en una variable aleatoria estamos estandarizando.

Sean (X_1, X_2, \dots, X_n) , variables aleatorias distribuidas normal e independientemente con medias:

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

y varianzas $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2)$

Entonces la distribución de :

$$Y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

es normal, con media μ_y :

$$\mu_y = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n$$

y varianza:

$$\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$$

Lo anteriormente mostrado, lo podemos plantear de una manera más formal:

Definición: Si X es una variable aleatoria con valores reales entre $(-\infty, \infty)$, y su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$(-\infty < X < \infty)$

μ y σ son los parámetros que satisfacen que:

$$\mu \text{ está en } (-\infty, \infty)$$

y que:

$$\sigma > 0$$

Teorema: Si X se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$

Entonces su función generatriz de momentos esta dada por:

$$e^{[t\mu + (1/2)(t^2\sigma^2)]}$$

$$1. M_X(t) = e^{[t\mu + (1/2)t^2\sigma^2]} \quad (\text{Ec. 4.11})$$

$$2. E(X) = \mu \quad (\text{Ec. 4.12})$$

$$3. V(X) = \sigma^2 \quad (\text{Ec. 4.13})$$

1. Demostración para la Ec. 4.11 :

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

haciendo el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

se tiene: $X = Z\sigma + \mu$

$$dx = \sigma dz$$

por tanto:

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(z\sigma + \mu)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dx$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma} e^{t\mu} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz$$

$$M_X(t) = e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz\sigma} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz$$

$$M_X(t) = e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz\sigma)} dz$$

$$M_x(t) = e^{t\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z-t\sigma]^2} e^{t^2\sigma^2} dz$$

$$M_x(t) = e^{t\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z-t\sigma]^2} e^{\frac{1}{2}(t^2\sigma^2)} dz$$

$$M_x(t) = e^{\mu + \frac{1}{2}(t^2\sigma^2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[z-t\sigma]^2} dz \quad (\text{Ec. 4.14})$$

Haciendo un nuevo cambio de variables para demostrar que la integral es una función de distribución probabilística y por lo tanto es igual a uno:

$$Z - t\sigma = \omega$$

$$dz = d\omega$$

$$M_x(t) = e^{\mu + \frac{1}{2}(t^2\sigma^2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega$$

$$M_x(t) = e^{\mu + \frac{1}{2}(t^2\sigma^2)} \quad (\text{Ec. 4.15})$$

2. Para la Ecuación 4.12

$$E(x) = \frac{d[M_x(t)]}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$E(x) = \frac{d \left[e^{\mu + \frac{1}{2}(t^2\sigma^2)} \right]}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$E(x) = e^{\mu + \frac{1}{2}(t^2\sigma^2)} (\mu + t\sigma^2) \Big|_{t=0} \quad (\text{Ec. 4.16})$$

$$E(x) = \mu$$

3. Para la Ecuación 4.13

$$V(x) = E(x) - [E(x)]^2$$

Se trabaja sobre el primer termino:

$$a = t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

$$E(x^2) = \frac{d[M_x(t)]}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$E(x^2) = \frac{d[\mu e^a + t\sigma^2]}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$E(x^2) = \mu e^a (\mu + t\sigma) + t\sigma^2 [e^a (\mu + t\sigma^2) + e^2 e^a] \Big|_{t=0} \quad (\text{Ec. 4.17})$$

$$E(x^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

Regresando a la varianza:

$$V(x) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2$$

$$V(x) = \sigma^2$$

Teoremas importantes

Teorema de Chebyshev

Este teorema es útil para obtener un límite inferior de la probabilidad de una variable aleatoria, caiga en un intervalo de la forma :

$$[\mu - k\sigma; \mu + k\sigma]$$

Para cualquier distribución de probabilidad es fácil obtener el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria, sin embargo el caso contrario no es válido.

Bajo estas circunstancias conocer el porcentaje de la población que se encuentra en el intervalo entre la media poblacional y un múltiplo de la desviación estándar y además sea independiente de la distribución a la que pertenezca la variable aleatoria, pues es muy buena ayuda; esto se considera, que es la principal justificación de los límites de los gráficos de control.

El teorema de Chebyshev se enuncia así:

La probabilidad de que una variable aleatoria X tome un valor dentro de k desviaciones estándar respecto de la media es por lo menos

$1 - \frac{1}{k^2}$ esto es:

$$P(x - \mu < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad (\text{Ec. 4.18})$$

Demostración:

Por definición sabemos que:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Ec. 4.19} \quad \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &+ \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \geq \int_{-\infty}^{\mu + k\sigma} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \end{aligned}$$

Puesto que la 2ª de las tres integrales en la Ec. 4.19 es no negativa, la podemos suprimir:

Ahora, en vista de que:

$$(x - \mu)^2 \geq k^2 \sigma^2$$

Siempre que $x > \mu + k\sigma$

Siempre que $x \geq \mu + k \sigma$, o bien:

$x \geq \mu - k \sigma$, entonces:

$(x - \mu)^2 \geq k^2 \sigma^2$, en las integrales restantes.

Se puede establecer que:

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} k^2 \sigma^2 f(x) dx + \int_{\mu - k\sigma}^{\infty} k^2 \sigma^2 f(x) dx$$

así:

$$\int_{-\infty}^{\mu - k\sigma} f(x) dx + \int_{\mu + k\sigma}^{\infty} f(x) dx \leq \frac{1}{k^2}$$

entonces:

$$P(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma)$$

$$= \int_{\mu - k\sigma}^{\mu + k\sigma} f(x) dx \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad (\text{Ec. 4.19})$$

así para $k=2$

La probabilidad de que X caiga dentro de esa distancia 2σ es $3/4$.

De igual manera para 3σ será $8/9$.

Esto es que $3/4$ partes o $8/9$, según el caso, o más de las observaciones de cualquier distribución estarán en el intervalo $\mu \pm 3\sigma$, respectivamente.

Teorema Central del Límite (Walpole y Myers, 1982)

Enfoquémonos a la distribución de la media muestral, con la intención de obtener conclusiones importantes relacionadas con el área del control estadístico de calidad.

Teorema:

Si se tiene una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$; entonces la distribución de la media es:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Demostación:

$$X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (\text{Ec. 4.21})$$

Tomamos una muestra aleatoria (X_1, X_2, \dots, X_n) de una población normal. Cada una de las X_i 's tendrán media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, por lo tanto, si las X_i 's son independientes:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \frac{1}{n} E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \\ &= \frac{1}{n} [E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} [n\mu]$$

$$E(X) = \mu$$

Para la varianza:

$$V(X) = V \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right]$$

$$V(X) = \frac{1}{n^2} V \left[\sum_{i=1}^n X_i \right]$$

$$V(X) = \frac{1}{n^2} V [X_1 + X_2 + \dots + X_n]$$

$$V(X) = \frac{1}{n^2} [V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)]$$

$$V(X) = \frac{1}{n^2} [n\sigma^2]$$

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{Ec. 4.22})$$

Observaciones:

- La muestra fue obtenida de una población con distribución normal.
- La media es una importante medida de tendencia central, el teorema central del límite cuando la muestra se obtiene de una población sin importar la distribución, forma la base del tema control estadístico de calidad.

Formalmente:

Sean (X_1, X_2, \dots, X_n) una muestra de una población con función de densidad normal.

Con media μ y varianza σ^2 , entonces cuando n tiende a infinito, la distribución de la variable aleatoria es:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma} \quad (\text{Ec. 4.23})$$

$$Z = \frac{[X - E(X)]}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Resumiendo:

En el teorema central del límite, "La distribución de una media muestral de una población que tiene una varianza finita tiende a distribuirse normalmente a medida que el tamaño de la muestra tiende al infinito".

Aunque la distribución de una población no es normal, la media muestral se aproxima a una distribución normal, a medida que n es grande, sin embargo es adecuada también para una muestra de tamaño menor, lo anterior se muestra en las siguientes figuras:

Gráficamente:

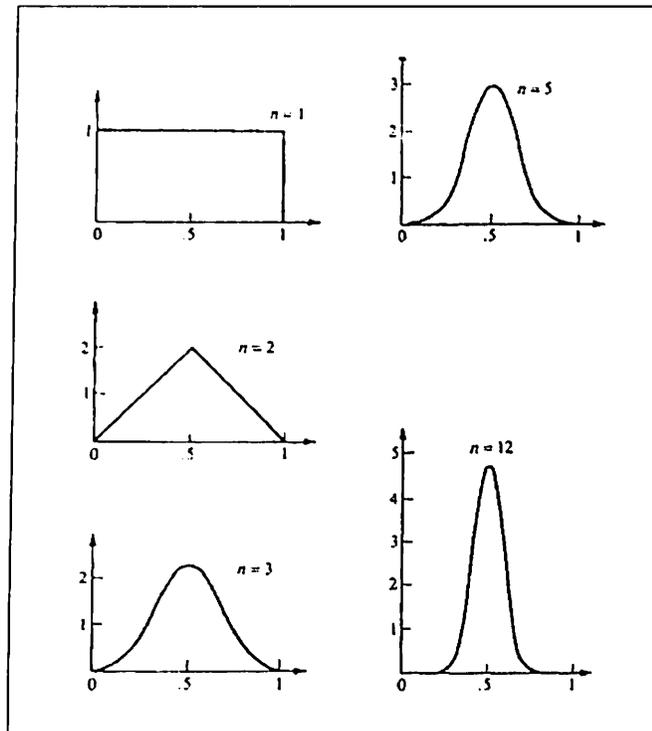


Figura 4.1. Ejemplos del teorema del límite central.

Se aprecia que la población no se ajusta a una normal, pero al tomar el promedio de las muestras se aproxima.

De la Figura 4.1 se puede comentar que presenta la distribución de una media muestral de n observación tomadas de una distribución uniforme.

Por el teorema central del límite podemos hacer varias inferencias estadísticas usando la media de la muestra, suponiendo que la población si distribuye normal.

Teorema:

Suponga que (X_1, X_2, \dots, X_n) son n observaciones de una población con una media μ y una varianza σ^2 , y que \bar{X} es la media de la muestra. Entonces el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de X son:

$$E(X) = \mu \quad (\text{Ec. 4.24})$$

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{Ec. 4.25})$$

$$D(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 4.26})$$

Teorema:

Suponga que (X_1, X_2, \dots, X_n) es una muestra aleatoria que se distribuye $N(\mu, \sigma^2)$, y \bar{X} es la media de la muestra. Entonces \bar{X} se distribuye como $N(\mu, \sigma^2/n)$ Figura 4.2.

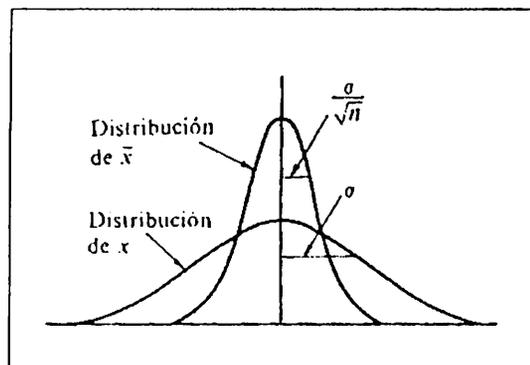


Figura 4.2. Comparación de distribución de la media y de la variable X ambos distribuyéndose normal.

Pruebas de Hipótesis

Es comun pretender conocer algo o bien obtener información de un parámetro (Θ), que de alguna manera define una distribución de probabilidad:

$$f(X; \Theta)$$

Donde Θ pertenece al espacio de parámetros Ω las observaciones son:

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

De una muestra obtenida de dicha población.

Y el vector toma valores en un conjunto Z .

Sea w un subconjunto de Ω y se considera las siguientes hipótesis nulas:

$$\begin{cases} H_0 : \Theta \in \omega & \text{Hipotesis Nula} \\ H_a : \Theta \in \Omega - \omega & \text{Hipotesis alternante} \end{cases}$$

En general se tiene interes en probar hipótesis como:

$$\begin{cases} i) & H_0 : \Theta = \Theta_0 & H_a : \Theta > \Theta_0 \\ ii) & H_0 : \Theta = \Theta_0 & H_a : \Theta < \Theta_0 \\ ii) & H_0 : \Theta = \Theta_0 & H_a : \Theta \neq \Theta_0 \end{cases}$$

Basados en la muestra, interesa decir si se rechaza o no la hipótesis nula.

Para determinar la decisión, se corre una prueba que consiste en dividir en dos subconjuntos Z_r y Z_a :

$$f(X; \Theta)$$

Donde Θ pertenece al espacio de parámetros Ω las observaciones son:

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

De una muestra obtenida de dicha población.

Y el vector toma valores en un conjunto Z .

Sea w un subconjunto de Ω y se consideran las siguientes hipótesis nulas:

$$\begin{cases} H_0: \Theta \in w & \text{Hipótesis nula} \\ H_a: \Theta \in \Omega - w & \text{Hipótesis alternante} \end{cases}$$

En general se tiene interés en probar hipótesis como:

$$\begin{cases} \text{i) } H_0: \Theta = \Theta_0 & H_a: \Theta > \Theta_0 \\ \text{ii) } H_0: \Theta = \Theta_0 & H_a: \Theta < \Theta_0 \\ \text{iii) } H_0: \Theta = \Theta_0 & H_a: \Theta \neq \Theta_0 \end{cases}$$

Basados en la muestra, interesa decir si se rechaza o no la hipótesis nula.

Para determinar la decisión, se corre una prueba que consiste en dividir a Z en dos subconjuntos Z_r y Z_a :

Los dos subconjuntos anteriores deben cumplir:

$$Z = Z_r \cup Z_a \quad Z_r \cap Z_a = \phi$$

De esta manera se puede decir:

Si $X \in Z_r$ entonces se rechaza H_0

Si $X \in Z_a$ entonces se acepta H_0

Función de Potencia de Prueba.

Definición. La función de potencia de una prueba de hipótesis estadística H_0 , contra una alternante H_a estándar por:

$$\pi(\Theta) \begin{cases} \alpha(\Theta) & \text{para valores de } \Theta \text{ supuestos con } H_0 \\ 1 - \beta(\Theta) & \text{para valores de } \Theta \text{ supuestos con } H_a \end{cases}$$

Por lo tanto, los valores de la función de potencia son las probabilidades de rechazar la hipótesis nula (H_0), para diversos valores del parámetro Θ . Observar también así mismo, que para valores de Θ supuestos para H_0 , la función de potencia de la probabilidad de cometer un error tipo I y para valores de Θ supuestos para H_a , la probabilidad de no cometer un error tipo II.

Rechazar H_0 si $X > C$

En donde C es una constante que se va a determinar.

Dado que la población es normal, los tres puntos se representan en la figura 4.3:

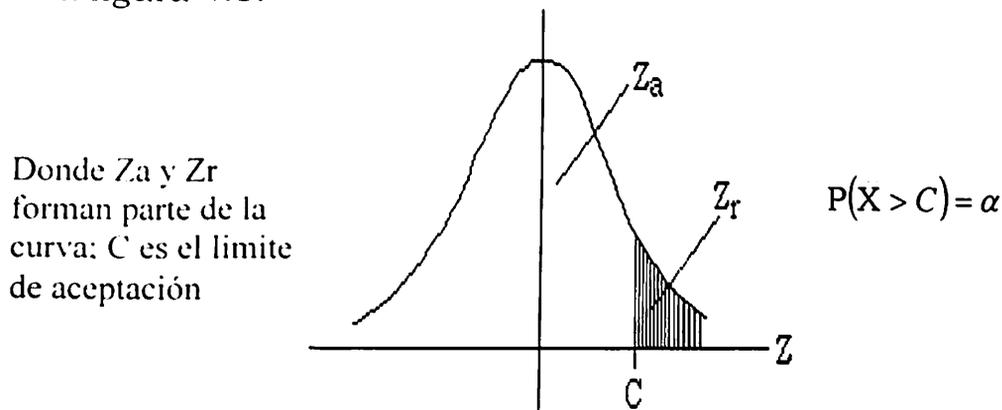


Figura 4.3 Representación grafica de tres puntos de una muestra Normal.

Si $X \in Z_a$ Se acepta H_0 .

Si $X \in Z_r$ Se rechaza H_0 .

Sea Θ , un parámetro que define una función de probabilidad $f(x; \Theta)$.

Por la definición de función OC se tiene:

$$L(\mu) = P(\text{Aceptar } H_0_{\Theta}) \quad (\text{Ec. 4.27})$$

$$L(\mu) = P(\text{Aceptar } H_0_{\Theta \in \omega})$$

$$L(\mu) = P(X \leq C_{\mu})$$

Como se trata de una distribución normal por el Teorema Central del Limite:

$$L(\mu) = P(\bar{X} \leq C_\mu)$$

Como se trata de una distribución normal por el Teorema Central del Límite:

$$L(\mu) = P(\bar{X} \leq C) = \Phi\left[\frac{(C-\mu)\sqrt{n}}{\sigma}\right] \quad (\text{Ec. 4.28})$$

$L(\mu)$ como cualquier función tiene propiedades generales:

$$L(-\infty) = 1$$

$$L(\infty) = 0$$

$$L(\mu) < 0$$

Y por lo tanto L es una función estrictamente decreciente por μ .

Estas tres propiedades son verificables y de acuerdo con la tercera, la gráfica de $L(\mu)$ (Figura 4.4) es aproximadamente:

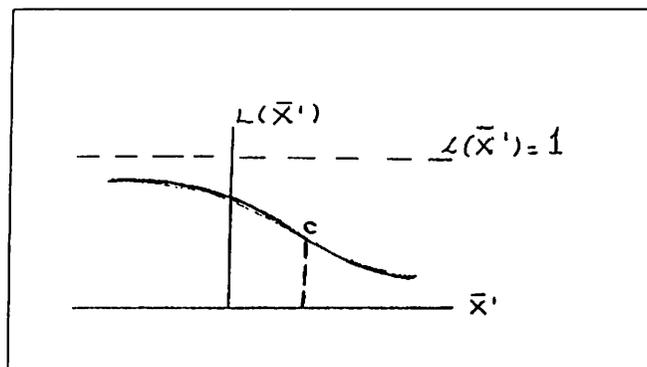


Figura 4.4. Gráfica de $L(\mu)$

No se debe olvidar que el objetivo de la prueba es conocer un poco acerca del parámetro, manteniendo los dos tipos de error lo más pequeños posibles.

Así, se tienen dos casos:

Caso 1. Se desea conocer el valor de C, es decir el valor que servirá como referencia para aceptar o rechazar H_0 .

Se especifica a n y al error tipo I (α).

Se tiene como hipótesis:

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; H_a : \mu > \mu_0$$

y se rechaza H_0 si $\mu > C$

$$\begin{aligned} L(\mu) &= P(\text{aceptar } H_0 / \mu) = 1 - \alpha \\ &= P(\mu \leq C) \end{aligned}$$

Por la distribución normal se tiene:

$$Z_{1-\alpha} = \Phi \left[\frac{(C - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \right]$$

En donde $Z_{1-\alpha}$ se puede obtener desde la tabla de la distribución normal.

Despejando C de la ecuación anterior.

$$Z_{1-\alpha} = \Phi \left[\frac{(C - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \right] \quad (\text{Ec. 4.29})$$

De esta manera se rechaza H_0 con un error tipo I de tamaño α si:

$$Z_{1-\alpha} (C - \mu_0) \sqrt{n}$$

$$C = \mu_0 + \frac{\sigma Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

$$\mu > \mu_0 + \frac{\sigma Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 4.30})$$

Caso 2. Si se desea determinar n y C , se debe especificar tanto el error tipo I como el II. De otro modo se debe especificar:

$$L(\mu_0) = \alpha$$

$$L(\mu_1) = \beta$$

Se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$Z_{1-\alpha} = \Phi \left[\frac{(C - \mu_0) \cdot n}{\sigma} \right] \quad (\text{Ec. 4.31})$$

$$Z_{\beta} = \left[\frac{(C - \mu_1) \cdot n}{\sigma} \right] \quad (\text{Ec. 4.32})$$

Que se convierte en:

$$\frac{(C - \mu_0) \cdot n}{\sigma} = Z_{1-\alpha} \quad (\text{Ec. 4.33})$$

$$\frac{(C - \mu_1) \cdot n}{\sigma} = Z_{\beta} \quad (\text{Ec. 4.34})$$

Se puede obtener:

$$\sigma = \frac{(C - \mu_0) \cdot n}{Z_{1-\alpha}} \quad (\text{Ec. 4.35})$$

$$\sigma = \frac{(C - \mu_1) \cdot n}{Z_{\beta}}$$

Dado que σ y n son iguales para ambas ecuaciones.

$$\frac{(C-\mu_0)}{Z_{1-\alpha}} = \frac{(C-\mu)}{Z_\beta} \quad (\text{Ec. 4.36})$$

Haciendo operaciones:

$$C = \frac{\mu_0 Z_\beta - \mu Z_{1-\alpha}}{Z_\beta - Z_{1-\alpha}}$$

Ahora se obtiene n de Ecs. 4.31 ó 4.32 elevando al cuadrado:

$$\frac{(C-\mu_0) \cdot n}{\sigma} = Z_{1-\alpha}$$

$$n = \left[\frac{\sigma (Z_{1-\alpha})}{(C-\mu_0)} \right]^2$$

es decir rechaza H_0 si:

$$\mu \geq \frac{\mu_0 Z_\beta - \mu Z_{1-\alpha}}{Z_\beta - Z_{1-\alpha}} \quad (\text{Ec. 4.37})$$

y se utiliza un tamaño de muestra de:

$$n = \left[\frac{\sigma (Z_{1-\alpha})}{(C-\mu_0)} \right]^2 \quad (\text{Ec. 4.38})$$

Para asegurar un error tipo I y error tipo II. Supongamos ahora que σ^2 se desconoce:

El estimador es:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (\text{Ec. 4.39})$$

Se ha visto que:

$$H_0 : \mu = \mu^0 \quad H_a : \mu > \mu^0$$

$$L(\mu) = P(\text{Aceptar } H_0 | \mu) = 1 - \alpha$$

$$L(\mu) = P(\mu \leq C) = 1 - \alpha$$

$$1 - \alpha = P \left[\frac{(\mu - \mu_0) \cdot n}{\sigma} \leq \frac{(C - \mu) \cdot n}{\sigma} \right]$$

Se sabe que:

$$\frac{(C - \mu) \cdot n}{\sigma} \sim t_{n-1, 1-\alpha}$$

despejando C y sustituyendo se puede obtener.

$$> \mu_0 + \frac{\sigma t_{n-1, 1-\alpha}}{n} \quad (\text{Ec. 4.40})$$

Por un procedimiento similar al del caso dos fijando los dos tipos de error se tiene:

$$Z_{1-\alpha} = \Phi \left[\frac{(C - \mu_0) \cdot n}{\sigma} \right]$$

$$\Phi \left[\frac{(C - \mu) \cdot n}{\sigma} \right] = Z_{\beta}$$

Que se convierte en:

$$\frac{(C - \mu_0) \cdot n}{\sigma} \sim t_{n-1, 1-\alpha}$$

$$\frac{(C - \mu) \cdot n}{\sigma} \sim t_{n-1, \beta}$$

Se puede obtener: $C = \frac{\mu_0 t_{n-1, \alpha} - \mu t_{n-1, 1-\beta}}{t_{n-1, \alpha} - t_{n-1, 1-\beta}}$

$$n = \left[\frac{\sigma t_{n-1, 1-\alpha}}{(C - \mu)} \right]^2$$

- Rechazar una hipótesis significa concluir que es falsa, mientras que aceptar una hipótesis solamente implica que no se tiene suficiente información como para creer otra cosa.
- Un enunciado con la esperanza de ser rechazado se considere una hipótesis nula (H_0).
- El rechazo de H_0 es una hipótesis alterna H_1 .
- Una hipótesis nula (H_0) referida a un parámetro de la población sera siempre enunciada de tal forma que se especifique un valor exacto del parámetro; la alternante (H_1) podra tener la posibilidad de muchos valores.

Se considera pertinente incluir las siguientes definiciones:

Definición 1

Al rechazo de la hipótesis nula esta es verdadera se le denomina error tipo I.

Definición 2

A la aceptación de la hipótesis nula cuando esta es falsa se le denomina error tipo II.

Situaciones posibles al aprobar una hipótesis estadística.

Aceptar H_0 H_0 es verdadera, decisión correcta error tipo I

Rechazar H_0 H_0 es falsa, error tipo II, decisión correcta.

V. MUESTREO EN EL PROCESO

Si se selecciona una muestra, digamos (X_1, X_2, \dots, X_n) de manera que las observaciones X_i se distribuyan independientemente e idénticamente, entonces se tiene una muestra aleatoria de tamaño n , esto será para una muestra con reposición.

En un muestro sin reposición de una población finita de N elementos, se dice que una muestra de n elementos en una muestra aleatoria, si cada una de las $\binom{N}{n}$ muestras posibles tienen igual probabilidad de ser escogida.

Un estadístico se define como una función de los datos muestrales que no contienen parámetros desconocidos.

Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) las observaciones de una muestra, entonces la media muestral es:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (\text{Ec. 5.1})$$

La varianza muestral:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (\text{Ec. 5.2})$$

y la desviación estándar : $S = \sqrt{S^2}$ (Ec. 5.3)

Si se conoce la distribución de probabilidad de una población, de la cual se obtuvo la muestra, entonces es posible calcular la distribución de probabilidad de una estadística, que también se llama distribución de muestreo.

Muestreo a Partir de una Distribución Normal

Sea X una variable aleatoria $N(\mu, \sigma^2)$ sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una muestra tomada de tamaño n tomada. Entonces la distribución de la media muestral \bar{X} es $N(\mu, \sigma^2/n)$ (ver distribución normal)

Esta propiedad de la media muestral, no se limita a una muestra de poblaciones normales.

$$\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right] \sqrt{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i) - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Por el teorema central del limite se sabe que la distribución de la variable aleatoria, \bar{X} es aproximadamente normal con media $n\mu$ y

varianza $n\sigma^2$, sin importar la distribución de la población. Así, la distribución de muestreo de la media muestral es:

$$X \sim N[\mu, n\sigma^2]$$

Si se importa la distribución de la población la X^2 (ji - cuadrada), es una distribución de muestreo que es importante y que está definida en términos de la distribución normal.

Si (X_1, X_2, \dots, X_n) son variables aleatorias normales e independientes distribuidas con media cero y varianza uno; entonces la variable aleatoria :

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

Tiene una distribución Xi- cuadrada con n grados de libertad.

La distribución de probabilidad de X^2 es:

$$f(x^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{2^{\frac{\nu}{2}-1}} e^{-\frac{x}{2}}$$

Ilustrando el uso de la X^2 :

Suponga $(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$

entonces la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1} \quad (\text{Ec. 5.5})$$

esto es que la distribución de muestreo de:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad (\text{Ec. 5.6}) \quad \text{cuando el muestreo es a}$$

partir de la distribución normal.

Muestreo a Partir de la Distribución t

Otra distribución de muestreo útil es la distribución t.

Si X y t son variables aleatorias independientes, normal estándar y ji-cuadrada respectivamente, entonces la variable aleatoria:

$$t_k = \frac{X}{\sqrt{\frac{X^2_k}{k}}} \sim t_k \quad (\text{Ec. 5.7})$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{k\pi \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left[\frac{t^2}{k} + 1 \right]^{-\frac{(k+1)}{2}} \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{Ec. 5.8})$$

Con media $\mu = 0$

y varianza $\sigma^2 = \frac{k}{k-2}$ para $k > 2$ (Ec. 5.9)

Si $k = \infty$, la t se convierte en normal estándar

Ejemplo de una variable aleatoria distribuida como t.

suponga:

(X_1, X_2, \dots, X_n) es una muestra aleatoria de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$

Si \bar{X} y S^2 se calculan para la muestra; entonces:

$$t_{n-1} \sim \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{X - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{X^2_{n-1}/(n-1)}} = \frac{N(0, 1)}{\sqrt{X^2_{n-1}/(n-1)}} \quad (\text{Ec. 5.10})$$

dado que $(n-1) S^2/\sigma^2 \sim X^2_{n-1}$, para la variable aleatoria:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Muestreo a Partir de una Distribución F

Una última distribución muestral basada en el proceso normal es la distribución F.

Si X^2_u y X^2_v son dos variables aleatorias ji-cuadrada independientes con u y v grados de libertad, entonces la razón:

$$F_{u, v} = \frac{X^2_u/u}{X^2_v/v} \sim F_{u, v} \quad (\text{Ec. 5.11})$$

La función de densidad de F es:

$$g(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right) \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{u}{2}}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left[\left(\frac{u}{v}\right)^{F+1}\right]^{\frac{(u+v)}{2}}} \frac{F^u - 1}{2} \quad (\text{Ec. 5.12})$$

$$0 < F < \infty$$

Ilustrando:

Se tienen dos procesos normales independientes.

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Sea $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n})$ es una muestra aleatoria de n_1 .

Sea $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n})$ es una muestra aleatoria de tamaño n_2 .

Si S_1^2 y S_2^2 son las varianzas muestrales, entonces.

$$\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

Lo cual se deduce de la distribución de muestreo de S^2 , que ya se considero.

F se usa para hacer inferencias acerca de las varianza de dos distribuciones normales.

VI. LOS GRAFICOS DE CONTROL

Introducción a los Gráficos de Control

Una gráfica de control es un método estadístico para el análisis de proceso con repetición. Comúnmente es usado para detectar comportamientos especiales en la calidad del proceso, sus insumos, sus factores participantes o sus productos. De existir desviaciones sustanciales, se podrán tomar medidas oportunas para corregir, si no las hay, se podrá pensar en mejorar los resultados.

El desarrollo global de productos y/o servicios que son comercializados, es vertiginoso, lo que ahora es la calidad deseada, en poco tiempo a futuro seguramente ya no lo será, pues seguramente los factores de participación en el proceso, como la materia prima, la maquinaria, la metodología, el mismo medio ambiente o la mano de obra, sufrirán cambios que tendrán que ser controlados establemente, con el fin de que se elaboren productos y/o servicios que sean de calidad deseada, consecuentemente en condiciones de productividad y competitividad, esto permitirá garantizar que las empresas logren una permanencia exitosa en los mercados.

En distintos puntos de la línea de producción, pueden que se estén dando cambios sustantivos, que de no detectarlos oportunamente, se constituirán en problemas vitales de calidad del producto o servicio. Factores como temperatura, acidez, son susceptibles de ser alterados, por ello, es necesario tener una evaluación sistemática de la variabilidad en un proceso de producción su frecuencia dependerá de las características y condiciones específicas de dicho proceso.

Sin embargo la variabilidad siempre está presente, por lo que es indispensable contar con una herramienta que distinga entre variaciones debidas al azar y las debidas a una causa. Precisamente mediante los gráficos de control se puede analizar el comportamiento de los procesos a través del tiempo y detectar los cambios o comportamientos debidos a alguna causa concreta.

Cuando un proceso está operando con variaciones aleatorias se dice que está en control estadístico, de otro modo, bajo variaciones causadas a aspecto atribuibles, estará fuera de control.

¿Qué son los Gráficos de Control?

Se usan desde 1924, cuando Shewhart (1925) los desarrolla. Son una herramienta estadística utilizada con fines de control que consiste en gráficas con líneas que son los límites calculados estadísticamente.

Aquí nos referimos a aquellos que pueden ser utilizados para todo tipo de control, no así los gráficos de ajuste, de éstos, haremos una revisión más adelante.

Entonces los gráficos sirven para poder eliminar una variación anormal.

¿Cómo Funciona un Gráfico de Control?

Es común que en los procesos productivos funcionen bajo control, sin embargo, también surgen efectos observables que afectan relevantemente al proceso, debido a causas atribuibles, como ya lo dijimos, que manifiestan un proceso fuera de control. Uno de los objetivos más importantes del control estadístico de procesos es detectar rápidamente la ocurrencia de causas atribuibles. El gráfico de control es una técnica de control de proceso en línea que se usa ampliamente. Se puede usar también con el fin de evaluar los parámetros de un proceso de producción y a partir de esta información, determinar la capacidad del proceso.

Fundamentos y Consideración de los Gráficos de Control

Las variaciones aleatorias siguen ciertas leyes y son el fundamento de los gráficos de control. Si se estudia un grupo de datos y se encuentra que sus variaciones tienen un comportamiento que se puede ajustar a cierta forma estadística (que es una distribución

probabilística) que puede ser producida por causas fortuitas, entonces se supone que no habrá causas atribuibles, con lo que podemos decir que las causas que generan tal variación, están bajo control; si las variaciones no se ajustan a cierta norma, se concluye que está actuando al menos una causa atribuible.

Las distribuciones probabilísticas, más usadas en el control de calidad son la normal, la binomial y la poisson.

Una propiedad importante de la normal es la siguiente: si se tiene una población N con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$, entonces entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$, se encuentra el 99.73 por ciento de los elementos de N caen ahí. Así, si en la muestra se detecta algún elemento fuera de los límites, entonces es altamente probable que tal población ya no tenga la misma media o la misma desviación estándar, esto dice que tal vez ocurrió un cambio importante en la población. Podemos decir que los límites de control se ubicarán entre $\mu + 3\sigma$ y $\mu - 3\sigma$, sin embargo es común que en algunos procesos de manufactura se habla de 6σ .

Antes de establecer un gráfico de control, es necesario definir con claridad el propósito del gráfico, el aspecto que se va a considerar y la unidad de donde se va a tomar la muestra.

Como propósitos se pueden anotar:

- Obtener información para establecer o cambiar estándares.

(Ver el Teorema de Chebyshev Capítulo IV).

- Obtener información para establecer o cambiar procedimientos.
- Tener un criterio para decidir si conviene investigar causas de variación del proceso.

La variable a considerar debe ser siempre algo que pueda ser cuantificado (tiempo, temperatura, pH, humedad).

En cuanto al tamaño de muestra, es conveniente que los subgrupos, se formen de acuerdo al tipo de gráfico. Para un gráfico

\bar{X} - R el Dr. Shewhart sugiere la elección de cuatro elementos para cada subgrupo, en períodos de media hora y dos horas, sin embargo parece ser mejor trabajar con cinco elementos, con número menor, el gráfico pierde sensibilidad con respecto a la detección de problemas y con más, se obtiene muy poca información adicional. (Ver el teorema central del Límite, Capítulo IV.)

VII. LOS GRAFICOS DE CONTROL POR VARIABLES

Tipos de Gráficos

Hay muchas clases de gráficos de control que muestran varios estadísticos y datos, cuyos límites de control se calculan por medio de varios métodos estadísticos. El propósito de este capítulo es hablar de los que emplean los límites de control 3σ , que son de uso común y práctico.

Los gráficos \bar{X} -R, \tilde{X} -R, y el gráfico X, se utilizan cuando las características del proceso que se ha de controlar es una variable continúa como pureza, acidez, longitud, volumen, tiempo, temperatura, presión, etc.

Los gráficos por variable que se revisarán son:

- Promedios- Rangos \bar{X} - R
- Medianas- Rangos \tilde{X} - R
- Promedios- Desviación standard \bar{X} - S
- Lectura individual (X)
- Mid-Rangos (MR)

Cada uno de ellos tiene un propósito específico.

Variación y los Gráficos de control. Detección de Cambios

Como lo mencionó. Shewhart (1924) la variación está presente en todo proceso dinámico, no existe un artículo que sea igual a otro. El estudio de la variación es el objetivo primordial del gráfico de control; podemos decir que:

- Todo varía
- Las observaciones individuales son impredecibles
- Un grupo de observaciones tiende a ser predecible o producir evidencia de que existen patrones no predecibles.

Varios tipos significativos de patrones de variación se obtienen por el análisis de las observaciones. Una forma de analizar las observaciones obtenidas por probar productos o el proceso para una o más características es el de elaborar un gráfico en el orden de aparición de datos. Otra forma es graficar las observaciones con respecto a un variable. Otra es la frecuencia de las ocurrencias.

Cuando se ha captado suficientemente la relación entre una característica de calidad y los factores del proceso que le afectan, entonces ahora se buscará controlar esos factores en ciertos niveles, de tal forma que el valor esperado de la característica de calidad se mantenga dentro de un rango deseable, esto es el control de un proceso y el gráfico es el medio que nos mostrará o identificará condiciones

anormales de los procesos y para mantener el proceso en condición estable (controlado).

La característica de control del proceso es una variable que se usa para conducir el control. Por lo que para la determinación de las características de control se debe considerar lo siguiente:

- Los valores característicos deben reflejar correctamente los estados del proceso.
- Deben minimizar los efectos de áreas externas.
- Los resultados deben estar disponibles de inmediato.
- El muestreo y la medición deben ser económicos.

Principios Generales de los Gráficos de Control

Importantes principios de los gráficos de control se han utilizado y explorado para entender las determinaciones de los mismos, con respecto al control estadístico, incluyendo patrones naturales y no naturales así como pruebas del control.

Patrones Naturales

Un proceso estable (bajo control constante) no producirá un patrón no natural razonable. Producirá un arreglo aleatorio de datos (puntos) que tendrán algunas características básicas, dada la forma como se distribuye el proceso en el tiempo, también se puede decir que los límites de control reflejan las colas que resultan de la forma de

distribución del estadístico que se analiza, por lo anterior, es entendible que estos arreglos aleatorios de datos de un proceso estable deberían tener las siguientes características en los gráficos de control:

- La mayor parte de los puntos ocurren cercanos al parámetro de tendencia central.
- Algunos puntos ocurren cerca de los límites de control.
- Sólo algún punto ocasionalmente ocurre fuera de los límites de control.
- Los puntos ocurren de una manera aleatoria, sin ningún otro arreglo.

Patrones no Naturales

Estos patrones son aquellos que fallan en una o más de las características de los arreglos aleatorios, esto lleva al hecho de que ciertos patrones pudieron no ser comúnmente entendibles:

- A). Se considera que no se cumpla en el proceso la primera de las consideraciones, esto puede ocurrir en los gráficos $\bar{X} - R$. Si la media cambia de tiempo en tiempo, (como el considerar al mismo tiempo dos máquinas o dos operarios), la mayor parte de los puntos estarán cercanos al límite superior o inferior; por otro lado, si la dispersión aumenta, no habrá una tendencia clara para los puntos cercanos al parámetro central.

B). Ahora se considera la ausencia de la segunda característica. Esto también puede ocurrir en el gráfico \bar{X} , a partir de una situación similar a la anterior, pero con una diferente forma de muestreo y manera de construir los subgrupos. El caso puede ser el hecho de que los subgrupos son formados intermitentemente dado distribuciones con diferentes medias del proceso, a esto se le llama patrón mezclado.

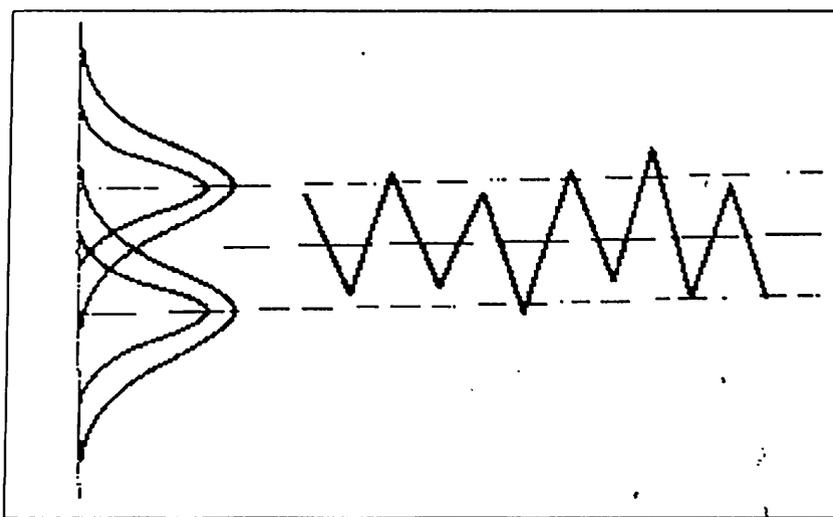


Figura 7.1. Patrón mezclado para un gráfico \bar{X}

Patrón Mezclado

Ahora se tienen dos distribuciones con diferentes medias y con modas iguales.

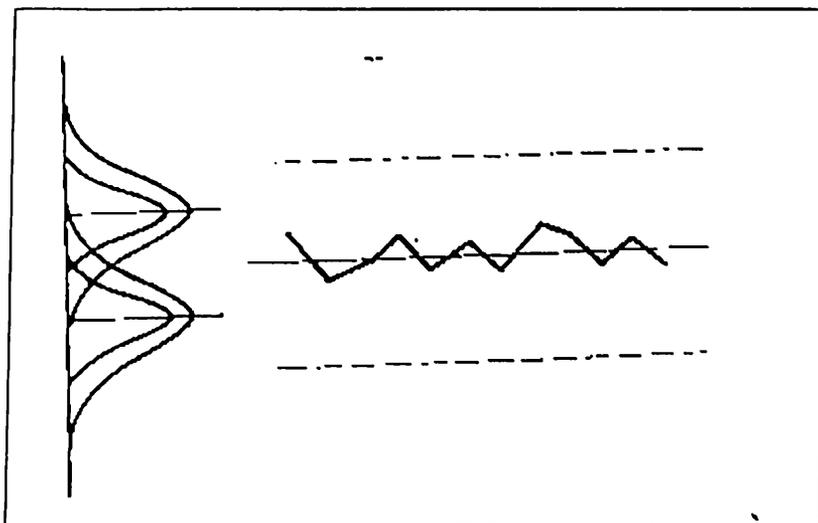


Figura 7.2. Distribuciones con diferentes medias y modas iguales

- C). El mismo caso anterior pero con cada subgrupo formado de la mezcla de dos procesos con diferentes medias.

El promedio de la muestra tiende a fluctuar cerca del centro de la mezcla y los rangos de los subgrupos, de donde los límites de control para X , son obtenidos y tenderán a ser "inflados". Este patrón no natural se le llama estratificación, en sí de esto resulta una mayor variabilidad en el gráfico.

- D). Para la cuarta característica de arreglos aleatorios, ejemplos de patrones no naturales son: tendencias, cambios súbitos en el nivel, agrupación de puntos. (Juran, 1974).

Principios Comunes para los Gráficos de Control

Se pueden establecer dos principios comunes:

- El uso de un gráfico en particular (su selección) dependerá del esquema del estadístico.
- Los límites del control son basados en el principio de la estimación de un valor esperado o de tendencia central del estadístico esquematizado más o menos tres veces la desviación estándar.

Gráficos de Control y Límites de Especificación

Es obvio que existe una amplia relación entre los límites de control y la media y la dispersión; pero para ello, debemos determinar si hay un mínimo o un máximo o ambos. En el primer caso podremos considerar a un resorte que tenga al menos una mínima resistencia a la tracción especificada y en el segundo caso, la dimensión de un tornillo, diámetro de un troquel, el grado de acidez de un suelo. Las figuras muestran los casos (considerando un proceso que se distribuye o comporta normal, centrado y bajo control). (Control estadístico de procesos, 1999. ITESM)

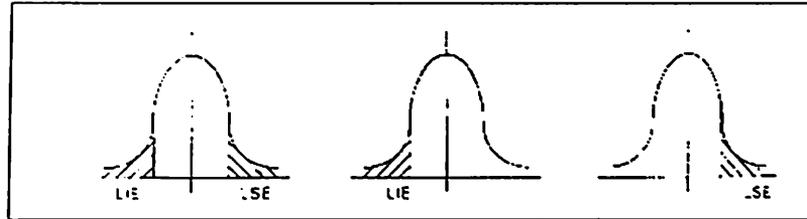


Figura 7.3. Proceso que se comporta normal centrado y bajo control

Cuando un proceso controlado es bilateral pertenece a una de las siguientes clases:

- El campo de variación del proceso ($\bar{X} \pm 3\sigma$) es considerablemente menor que la diferencia entre los límites de especificación.
- El campo de variación del proceso es considerablemente mayor que los límites de especificación.
- El campo de variación del proceso es aproximadamente igual a la diferencia entre los límites de especificación.

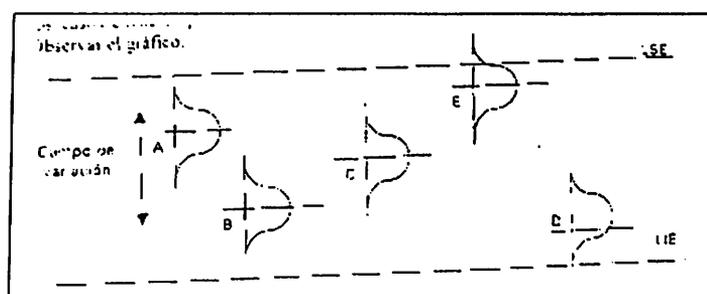


Figura 7.4. Variación no restringida a un intervalo pequeño.

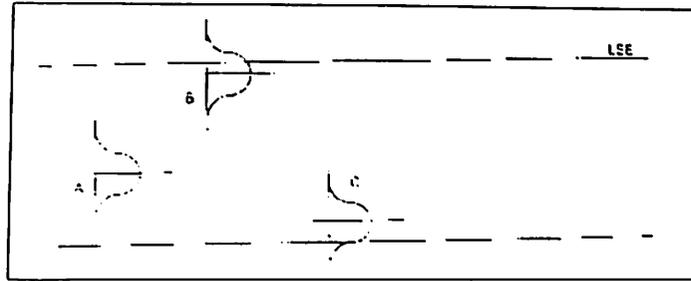


Figura 7.5. Procesos donde coinciden casi límites de control con los de especificación.

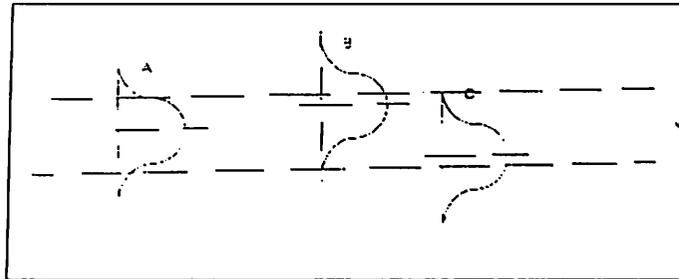


Figura 7.6. Situaciones de proceso inestable.

En la Figura 7.4 la variación de X no está restringida a un pequeño intervalo, puede ir desde X_A hasta X_D . Por cuestión de economía podemos dejar que X salga de control, con tal de que no se aparte mucho de los límites; C está centrado. El dejar que X vaya de \bar{X}_A a \bar{X}_D , puede evitar costos de frecuente ajustes en la maquinaria, así como disminuir el tiempo invertido en la búsqueda de causas atribuibles de variación que en realidad no son responsables del producto defectuoso. Es recomendable el criterio de captura y/o promover modificaciones de proceso y de límites de control, si esto contribuye a crear una situación económicamente ventajosa.

También es posible incrementar el tiempo o frecuencia de muestreo. Entre mayor sea la distancia entre los límites de especificaciones

con respecto al campo de variación del proceso, más favorable será la situación para obtener una producción correcta.

En la curva E, encontramos que parte de la producción está fuera del límite de control superior, entonces la acción a realizar es tratar de modificar la media del proceso \bar{X}_E , tratando de acercarlos más a \bar{X}_c .

La Figura 7.5 representa la situación donde casi coinciden los límites de control con los de especificación. Sólo la curva A, codifica una producción aceptable. La acción es tratar de mantener centrado la media del proceso, para lo que se propone el empleo continuado de gráficos de control, con intervalos cortos, entre los gotas de las muestras; se debe atender de inmediato a cualquier punto fuera de límite y a las tendencias y corridas y simultáneamente investigar las causas vitales, para disminuir la variación y desde luego, checar si las tolerancias responden a una realidad.

En la Figura 7.6 los límites son tan estrechos que cualquier situación tiene parte de producto defectuoso. Hay que revisar las tolerancias, introducir en el proceso cambios fundamentales que reduzcan su dispersión, de manera que el intervalo de variación pueda ser más amplio. También es importante mantener constante el valor central de la distribución. De no ser así (tal vez las pruebas estén basadas en ensayos destructivos), no existe la factibilidad de que toda la producción este de acuerdo a las especificaciones.

VIII. CONTROL DEL PROCESO CON GRAFICOS DE CONTROL

Cuando se conoce la relación entre una característica y los factores de proceso que la afectan, el siguiente paso es el de controlar esos factores en ciertos niveles de manera que el valor esperado de la característica de calidad se mantenga dentro de un rango deseable, esto es el control del proceso. El gráfico de control es útil en identificar condiciones anormales de los procesos para mantenerlos en condiciones estables.

Característica de Control

Es una variable que se usa para conducir el control del proceso, para determinar las características del control es necesario que recordemos que se debe considerar:

- a). Los valores característicos deben reflejar los estados del proceso.
- b). Debe minimizar los efectos de las áreas externas.
- c). Los resultados deben estar disponibles de inmediato.
- d). El muestreo y la medición deben ser económicos.

Determinación del Límite de Control

Para administrar un proceso por gráficos de control, es necesario analizar que la capacidad del proceso sea adecuada. (Que sea estable y

si los rangos de variación de la característica, indica conformidad satisfactoria con el estándar requerido para producir cierto producto, de otro modo es necesario establecer límites temporales de control, para ir mejorando el proceso).

Los gráficos de control que se hacen para el análisis del proceso, se compara con los valores estándar; si el proceso resulta estable, para el control del proceso (Fig. 8.1).

Revisión de los Límites de Control

Es necesario su revisión cuando se dan cambios técnicos sustantivos en el proceso y aunque no se presenten, es recomendable una revisión con cierta regularidad y la podemos basar en el rango de las fluctuaciones que pueden ocurrir cuando el proceso está controlado.

Estándares de Operación

Para poner un proceso en un estado estable por medio de su control, es necesario identificar los factores que influyen en las variaciones y evitar cambios anormales de los mismos; Para esto requiere la estandarización de los procedimientos de operación y de los métodos, las siguientes, son consideraciones a observar para ese fin:

- a). La estandarización debe ser consistente con los objetivos a lograr.
- b). Los estándares deben establecerse para controlar la fluctuación de los factores incidentes.

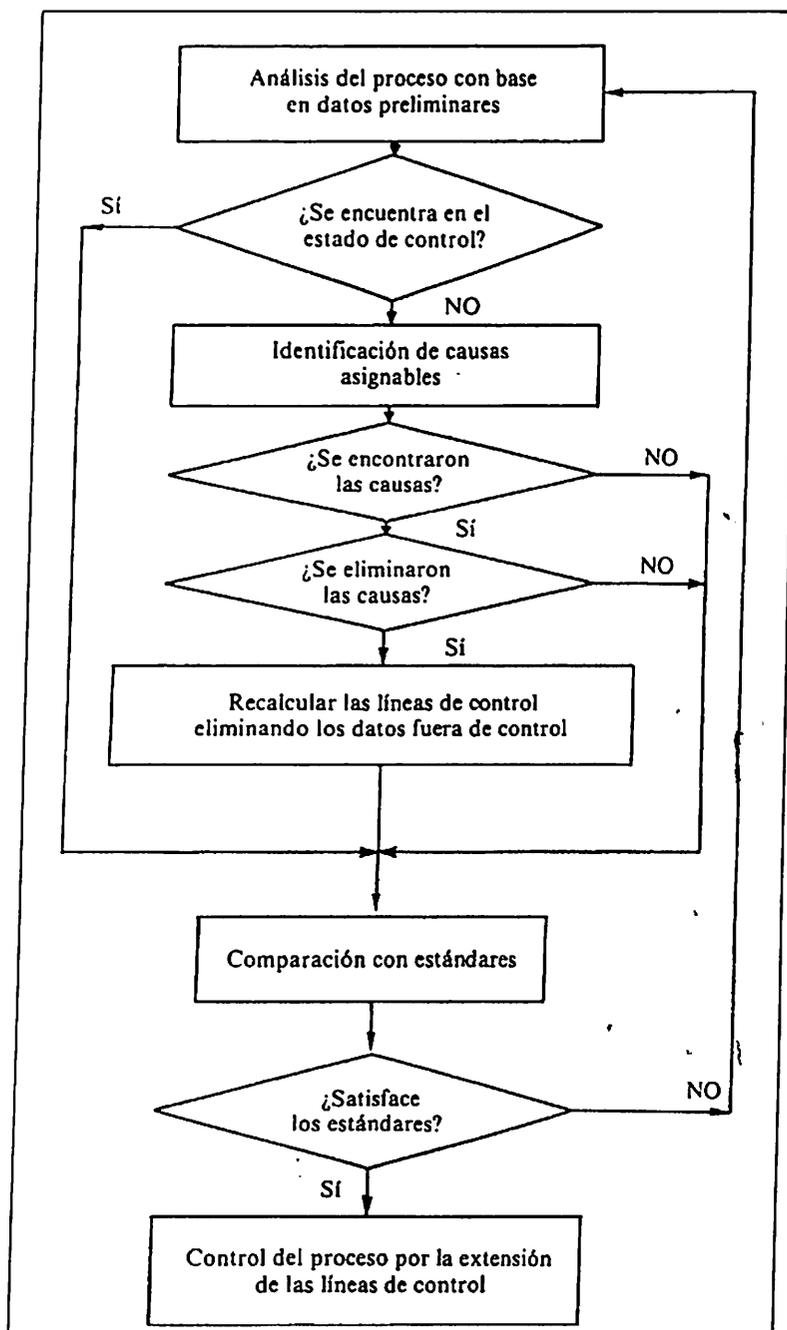


Figura 8.1. Flujo de decisión de líneas de control.

- c). Los estándares deben ser prácticos y servir como criterio de operación.
- d). Son decisiones tentativas y no metas ideales.
- e). Deben especificar los procedimientos importantes.
- f). Se deben revisar los estándares, y aclararse el proceso para fijarlos.
- g). Se deben describir las medidas temporales para emergencias.
- h). Se deben describir las medidas temporales para emergencias.
- i). Deben tenerse en cuenta las consideraciones a prueba de errores y para la seguridad.
- j). Deben orientarse hacia metas.
- k). Debe implementarse su instrucción y entrenamiento.

Comparación con Especificaciones

- Cuando haya necesidad de comparar los datos del proceso, se harán contra los límites de especificación y no contra \bar{X} o los límites de control.
- Aunque el proceso se encuentre bajo control el proceso puede producir productos defectuosos y viceversa, pues los límites de control sirven para proporcionar un juicio sobre si el proceso está en estado de control.
- Los límites de especificación sirven para proporcionar un juicio sobre si un artículo es o no defectuoso (cada uno).

- El estado de control sólo considera las causas debidas al azar y no a las causas asignables.
- La amplitud de los límites de control se determina basándose en la variación debida al azar, los límites de especificación se deben a la demanda de los consumidores o usuarios.

Como lo muestra la Figura 8.2 es probable se puedan presentar los siguientes cuatro casos:

- a). El proceso no está en estado de control y también se producen items defectuosos.
 - b). El proceso no está en estado de control, pero los productos no son defectuosos.
 - d). El proceso está en estado de control y los productos no son defectuosos.
- c) o b) presentan confusión; suceden cuando hay una falta de armonía entre la capacidad del proceso y la especificación. Para prevenir la ocurrencia de productos defectuosos, deben enfocarse los esfuerzos a mejorar la capacidad del proceso. En el caso (b) la capacidad del proceso es insuficiente para la especificación. En el caso (c) ocurre cuando el proceso tiene suficiente capacidad para la especificación y debe considerarse el mejoramiento de la eficiencia de producción.

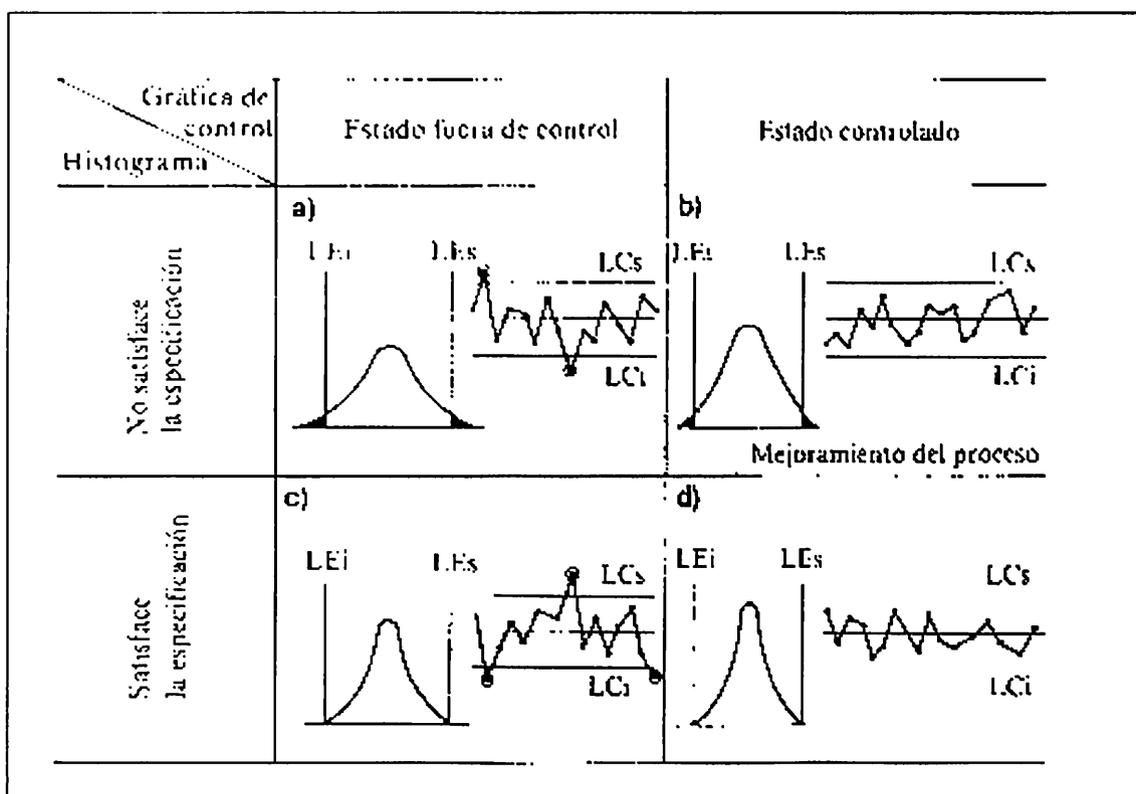


Figura 8.2. Comparación de gráficas de control con las especificaciones.

La Figura 8.3 representa los valores medios de 20 muestras de 5 elementos cada uno (subgrupo), los límites de especificación son 30, 50.

Se calcula y se obtiene $\bar{x} = 44$ $\sigma^2 = 6.45$, $3\sigma = 19.35$ el campo de variación del proceso es 24.65 y 63.35 con ello se graficó la distribución normal.

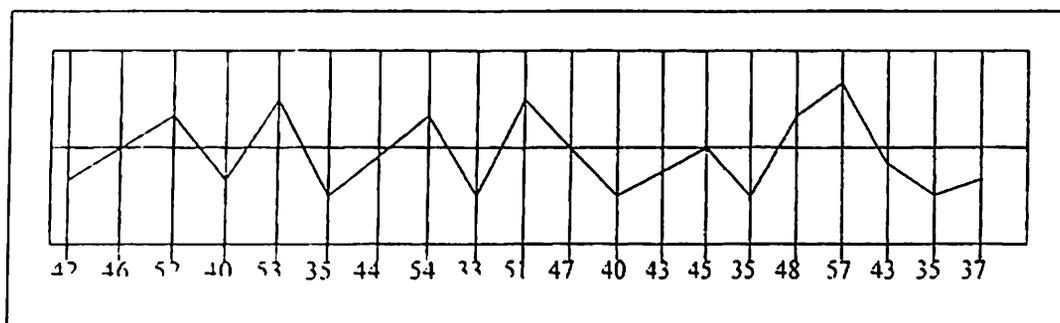


Figura 8.3. Representación gráfica de los valores medios de 20 muestras de 5 elementos cada una.

Comentarios

- El proceso en relación a los límites de especificación, no es centrado.
- El proceso está bajo control.
- Indices de dispersión alto.
- Hay 5 puntos por arriba del LSE. Hay probabilidades de encontrar productos fuera de especificación.
- Es necesario modificar el proceso de manera que llega a estar (o más próximo a 40 que el centro de especificación; así:
- Se disminuye la media y se reduce que haya producto fuera de especificación.
- Es necesario determinar acción para disminuir la dispersión.

Gráficos de Control y Límites Unidimensionales de Especificaciones

Cuando se tienen un solo límite de especificación, el criterio de clasificación es:

- El valor inferior $(\bar{x} - 3\sigma)$ de la distribución del proceso, se encuentra considerablemente arriba del límite de especificación.
- El valor inferior $(\bar{x} - 3\sigma)$ es aproximadamente igual al límite de especificación (L.E.).
- El valor inferior, $(\bar{x} - 3\sigma)$, es menor que el mínimo especificado.
- En el primer criterio, existe un margen de seguridad.
- En el segundo criterio, simplemente se cumple con la especificación.
- En el tercero, parte de la producción resultará defectuosa, a menos que se introduzca una mejora en el proceso.

El cambio puede ser: disminuir la dispersión o aumentar la media, la relación $(\bar{x} - \sigma)$, nos ayudará en la toma de decisiones, sobre las acciones a tomar. (Control estadístico de procesos, 1999. Curso ITESM)

Ejemplo:

En la elaboración de un producto de plástico es importante controlar la temperatura máxima, porque pasando ese límite no es posible el reproceso. Dado que los datos obtenidos del proceso nos indican que no hay puntos por encima del límite superior especificado, conviene: dejar el proceso como está o disminuir la dispersión.

Continuidad en el Empleo de Gráficos de Control

- Si el proceso es estable con \bar{X} y σ satisfactorios respecto a las especificaciones, los límites usados deben mantenerse.
- Cada vez que se van acumulando más datos, conviene verificar los límites y modificarlos, si es necesario.
- Es recomendable iniciar con 25 subgrupos, verificar con 50, continuar con 100, o un vez por semana o bien, al mes (según caso específico).

Juicio Estadístico

Antiguamente los procesos eran controlados por medio de la intuición y la experiencia para distinguir entre los tipos de variación; recordemos que la variación se atribuye a causas que podrán ser "causas del azar" (inevitables), propias del proceso y las "causas asignables" (evitables), que producen alguna anomalía en el proceso original una variación grande; las variaciones producidas son las controladas y las incontroladas, respectivamente.

Actualmente, los procesos se controlan usando herramientas estadísticas para poder observar al proceso, analizarlo y llegar a proponer acciones de mejora.

El objetivo es pues, desterrar las causas asignables de los procesos, para ello podemos usar el gráfico de control. El estudio del uso

de los gráficos de control se centra primordialmente, en el cálculo de los límites de control, que permitan inferir en el proceso.

De las causas asignables, sólo deberán ser objeto de estudio, aquellos que verdaderamente "hacen ruido" en el proceso, a ellos se les conoce como causas vitales, que son las que podrán generar, problemas vitales.

Cuando los datos están dispersos y se desea distinguir entre dos distribuciones diferentes con el objeto de accionar en el proceso, tenemos que comprender los conceptos de probabilidad y de error tipo I y II.

La probabilidad permite el análisis para la toma de decisiones. Si se toman muestras aleatorias de datos de una distribución, podemos esperar que muchos valores se encuentren cerca de la media o del pico de la distribución y que pocos de ellos, están cerca de las colas (se asume que la población N se distribuye normal centrada), por lo que la probabilidad de que los datos caigan por fuera de los ciertos límites muy pequeña; podemos pensar que esos datos no proceden de esta distribución, sino de cualquier otra distribución. Cuando una distribución tiene una variabilidad controlada, no se puede asumir que los datos que están en los extremos (probabilidad baja) de las colas o por fuera, formen parte de esta distribución, entonces se debe considerar que indican una variabilidad no controlada.

Como ya se mencionó, la mayor parte de las distribuciones estándar (σ), para dividir el área bajo la curva se pueden calcular las áreas de cada zona como porcentaje del área total. Este porcentaje es la probabilidad de obtener valores comprendidos entre los extremos superiores e inferiores de cada zona de la distribución cuando se sacan muestras al azar de una población (N), que tiene esta clase de distribución.

Se observa que en la Figura 8.4 la probabilidad de encontrar un valor dentro de un sigma (σ), a cada lado del parámetro media es del 68 por ciento, mientras que la probabilidad de obtener un valor por fuera de estos límites es 32 por ciento. De otro modo para una área de \pm tres sigma ($\pm 3 \sigma$), es de sólo 0.3 por ciento, o de encontrar tres valores en mil, cuando se cumple el hecho de que un valor caiga fuera de $\pm 3\sigma$ (raramente), se concluye que existen anomalías en el proceso, o que ésta ha cambiado, o que la distribución ha cambiado.

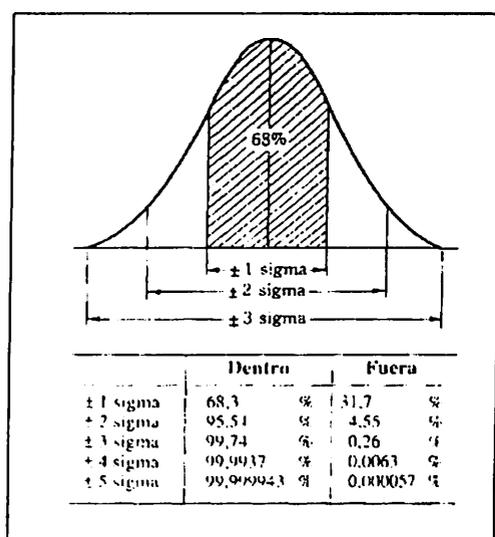


Figura 8.4. La distribución normal con sus probabilidades.

Si se pudiera afirmar que al lanzar un dado cinco veces cayera en los mismos cinco números pares consecutivos, otra persona diría que se ha hecho trampa. Probabilísticamente se tiene que la probabilidad de que caiga en una tirada un número par es $\frac{1}{2}$, por tanto en cinco serán $(1/2)^5 = 1/32 = 0.03$; esto es que la otra persona tiene una posibilidad de una entre 32 de equivocarse al afirmar que se hizo trampa, es decir no siempre tendrá razón.

Estadísticamente a este tipo de errores se le llama "error tipo I". De otro modo, si se afirma que se han sacado tres números pares seguidos, la otra persona podrá decir que "ha sido suerte" (es decir que no se hizo trampa). En realidad, se pudo haber hecho trampa sin que se diera cuenta. Estadísticamente este tipo de errores se llama "error tipo II". El hecho de que se emita un juicio, pone en situación de incurrir error tipo I o II, los cuales la base de las pruebas de hipótesis.

Ahora el proceso que muestra una dispersión, si se obtienen datos que caen en las colas de una distribución controlada, (A), como la siguiente, donde aparece el dato marcado (Fig. 8.5).

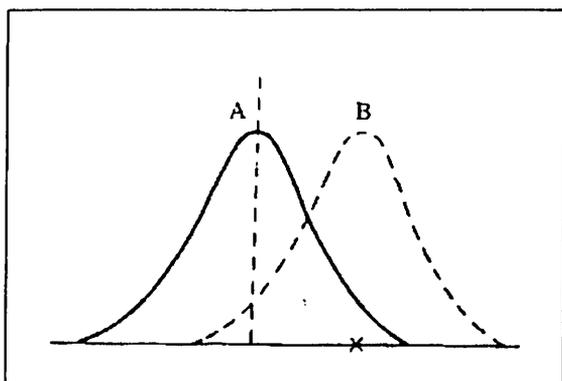


Figura 8.5. Hay dos distribuciones

Como la probabilidad es baja de que aparezca este valor, se puede presuponer que existirá un factor en el proceso que dio lugar a una distribución anormal, esto podría ser un error tipo I en el cual se concluye que la distribución es incontrolada (B), aunque realmente esté controlada (A). Sin embargo de otro modo se puede decir que el proceso está en control y con ello incurrir en el error tipo II. Aquí lo recomendable es no caer en los extremos, ni de apoyar "compulsivamente" un error tipo I, ni apoyar "por despiste" el error tipo II, pues se corre el riesgo de tener problemas vitales en el proceso.

Las líneas de los límites de un gráfico de control tienen en cuenta la posibilidad de cometer los dos tipos de error, y se trazan para distinguir dos distribuciones diferentes. Las líneas se trazan en los puntos de $\pm 3 \sigma$ de la variación que hay dentro del subgrupo, es decir se trazan para hacer que la probabilidad de cometer un error tipo I sea aproximadamente del 0.3 por ciento, lo mismo que observar un dato fuera del límite, indicaría que probablemente hay algo mal en el proceso, que estadísticamente no representa potencial causa vital.

Los límites de control son una forma de establecer reglas para la acción.

En pruebas de hipótesis generales en situaciones no controladas, la probabilidad de cometer el error tipo I, está entre el 1 y el 5 por ciento (nivel de significación).

Como la probabilidad es baja de que aparezca este valor, se puede presuponer que existirá un factor en el proceso que dio lugar a una distribución anormal, esto podría ser un error tipo I en el cual se concluye que la distribución es incontrolada (B), aunque realmente esté controlada (A). Sin embargo de otro modo se puede decir que el proceso está en control y con ello incurrir en el error tipo II. Aquí lo recomendable es no caer en los extremos, ni de apoyar "compulsivamente" un error tipo I, ni apoyar "por despiste" el error tipo II, pues se corre el riesgo de tener problemas vitales en el proceso.

Las líneas de los límites de un gráfico de control tienen en cuenta la posibilidad de cometer los dos tipos de error, y se trazan para distinguir dos distribuciones diferentes. Las líneas se trazan en los puntos de $\pm 3 \sigma$ de la variación que hay dentro del subgrupo, es decir se trazan para hacer que la probabilidad de cometer un error tipo I sea aproximadamente del 0.3 por ciento, lo mismo que observar un dato fuera del límite, indicaría que probablemente hay algo mal en el proceso, que estadísticamente no representa potencial causa vital.

Los límites de control son una forma de establecer reglas para la acción.

En pruebas de hipótesis generales en situaciones no controladas, la probabilidad de cometer el error tipo I, está entre el 1 y el 5 por ciento (nivel de significación).

Expresión Cuantitativa de las Distribuciones

Una distribución está determinada por suposición (o tendencia central), su extensión, (o dispersión) y su forma; o bien, si su pico está desplazado a la izquierda o a la derecha (asimétrica), o es agudo (curtosis), o es plano (aplastamiento). Todos estos aspectos pueden expresarse cuantitativamente o indicar en su forma a éstos se les llama (como ya se vio anteriormente) medidas.

Las Medidas de Tendencia Central

- **Media aritmética** \bar{X} (promedio): es la sumatoria de valores divididos entre el número de ellos.
- **Mediana** (\hat{X}): el valor central de los datos.
- **Moda**: el valor del pico de la distribución.

Las Medidas de Dispersión

- **Rango** (recorrido) (R): diferencia entre el valor mayor y el menor.
- **Desviación**: diferencia entre el valor determinado y la media.

Acerca de la Distribución de Frecuencia

Esta última herramienta ayuda a tener una primera visión sobre los datos que arrojan el proceso y sobre el proceso mismo,

además, son un preámbulo para la elaboración del gráfico de control, pues no es lo mismo observar datos en tabla (matriz) que en un arreglo por frecuencias, como se muestra a continuación. (Figs. 8.6 y 8.7).

3,88	3,88	3,84	3,82	3,83	3,93	3,86	3,84	3,90	3,97
3,84	3,85	3,90	3,87	3,94	3,89	3,87	3,87	3,86	3,87
3,84	3,84	3,85	3,88	3,89	3,96	3,84	3,79	3,81	3,84
3,88	3,83	3,84	3,85	3,93	3,81	3,87	3,83	3,89	3,87
3,81	3,91	3,90	3,86	3,83	3,90	3,87	3,90	3,86	3,86
3,78	3,92	3,98	3,74	3,88	3,81	3,94	3,91	3,97	3,75
3,88	3,94	3,90	3,88	3,85	3,87	3,90	3,78	3,86	3,87
3,88	3,79	3,80	3,80	3,79	3,82	3,86	3,84	3,92	3,83
3,90	3,90	3,83	3,84	3,95	3,84	3,97	3,89	3,86	3,90
3,84	3,81	3,84	3,98	3,99	3,86	3,85	3,79	3,87	3,78
3,93	3,84	3,88	3,85	3,91	3,89	3,84	3,88	3,89	3,97
3,83	3,90	3,93	3,87	3,90	3,92	3,91	3,70	3,79	3,73
3,97	3,89	3,78	3,83	3,87	3,90	3,84	3,76	3,81	3,82
3,85	3,83	3,81	3,83	3,76	3,77	3,90	3,79	3,83	3,90
3,89	3,86	3,84	3,89	3,83	3,80	3,86	3,80	3,89	3,83
3,90	3,77	3,79	3,83	3,85	3,85	3,89	3,84	3,83	3,95
3,88	3,87	3,81	3,91	3,89	3,84	3,79	3,86	3,78	3,89
3,81	3,77	3,73	3,85	3,80	3,77	3,78	3,83	3,75	3,83
3,94	3,90	3,75	3,77	3,83	3,79	3,86	3,89	3,84	3,99
3,83	3,94	3,84	3,93	3,85	3,79	3,84	3,88	3,83	3,80

Figura 8.6. Tabla del espesor de las planchas de acero (unidad:mm).

Núm. celda	Fronteras celda	Punto medio celda	Recuento	Frecuencia	Frecuencia relativa %	Frecuencia acumulada
1	3,395-3,725	3,710	/	1	0,5	1
2	3,725-3,755	3,740	× /	6	3,0	7
3	3,755-3,785	3,770	× × ×	13	6,5	20
4	3,785-3,815	3,800	× × × × ×	25	12,5	45
5	3,815-3,845	3,830	× × × × × × × × ×	45	22,5	90
6	3,845-3,875	3,860	× × × × × × × × ×	37	18,5	127
7	3,875-3,905	3,890	× × × × × × × × ×	43	21,5	170
8	3,905-3,935	3,920	× × ×	13	6,5	183
9	3,935-3,965	3,950	× ×	8	4,0	191
10	3,965-3,995	3,980	× ×	9	4,5	200
				200	100,0	200

Figura 8.7. Tabla de la distribución de frecuencias.

Objetivos de Preparar la Distribución de Frecuencia

- a. Visión objetiva del estado de la distribución.
- b. Identificar la capacidad del proceso
- c. Análisis del proceso y su control.
- d. Para determinar el promedio, la desviación estándar y otras medidas.
- e. Para probar a que tipo de distribución matemática se puede acoplar estadísticamente una distribución empírica.

Con los gráficos de control se puede calcular el valor especificado, el valor de referencia $(\bar{X} \pm \frac{3\bar{R}}{d_2})$ y así las distribuciones de frecuencia, pueden ser más fácilmente interpretadas.

Continuando con el juicio estadístico sobre los gráficos de control, en cuanto a los principios básicos se debe recordar que:

- El gráfico tiene tres componentes:

La línea de control superior.

La línea de control inferior.

La línea central del valor medio.

- Representan una característica de calidad.
- Contiene los datos de una muestra.
- Analiza causas vitales.
- Si todos los puntos están dentro de los límites, el proceso está bajo control.

- Si todos los puntos están dentro de los límites, y los puntos siguen un comportamiento no aleatorio, el proceso no está bajo control.
- Un punto el menor, fuera de los límites es evidente que el proceso está fuera de control.

Prueba de Hipótesis y Gráficos de Control

Existe una estrecha relación entre los gráficos de control y las pruebas de hipótesis, el gráfico en sí es una prueba de hipótesis de que el proceso está bajo control.

- Un punto que se ubica entre los límites de control equivale a no rechazar la hipótesis del control estadístico.
- Otro punto que esté fuera de los límites de control, implica poder rechazar la hipótesis.
- El error tipo I será entonces concluir que el proceso está fuera de control cuando no lo está o bien tipo II, contrario a la anterior premisa.
- Comúnmente es apropiado utilizar la curva característica de operación de un gráfico para representar su probabilidad de error tipo II.

Se puede ilustrar lo anterior mediante el siguiente ejemplo:

Una fábrica de anillos para pistón, para motores de autos, presentan una característica crítica que es el diámetro exterior del

anillo. El proceso estará controlado cuando se cumple que el diámetro exterior promedio sea 74 mm; la desviación estándar $\sigma=0.01$ mm. Se toma una muestra de cinco anillos (cinco lecturas) cada media hora. Se calcula el diámetro promedio de ellos (\bar{X}) y se representa en la gráfica. Dado que para el gráfico la media muestral es $n=5$ para poder monitorear la media del proceso, el gráfico será tipo \bar{X} .

Observando en el gráfico se aprecia que todos los puntos están dentro de los límites de control y por lo tanto, el proceso también lo está. (Fig. 8.8).

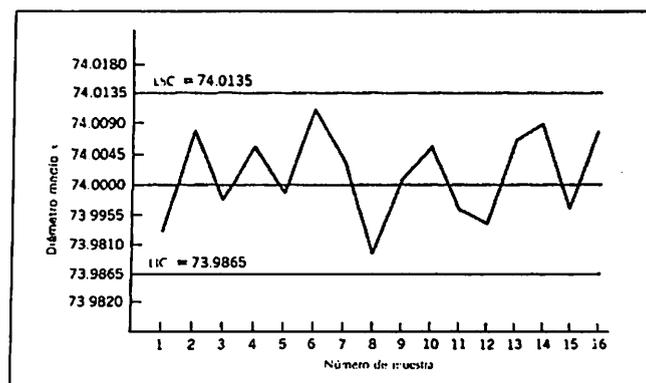


Figura 8.8. Diagrama de control de medias para el diámetro de anillos de pistón.

Si la media del proceso es 74 mm y $\sigma=0.01$ para $n=5$, la desviación estándar de la media muestral ($\sigma_{\bar{x}}$) es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{n} = \frac{0.01}{5} = 0.002$$

Por el teorema central del limite (para suponer que \bar{X} es normal) el 100 (1- α) porcentaje de los diámetros medios de las muestras están entre $[74 + \frac{Z_{\alpha}}{2} (0.0045); 74 - \frac{Z_{\alpha}}{2} (0.0045)]$, esto es $\hat{\mu} \pm \sigma_{\bar{x}}$.

Suponga que $\frac{Z_{\alpha}}{2} = 3$ (arbitrariamente), entonces:

$$\text{LSC} = 74 + 3(0.0045) = 74.0135$$

$$\text{LIC} = 74 - 3(0.0045) = 73.9865$$

Claramente se ve en la Figura 8.9 que los gráficos de control son 3σ .

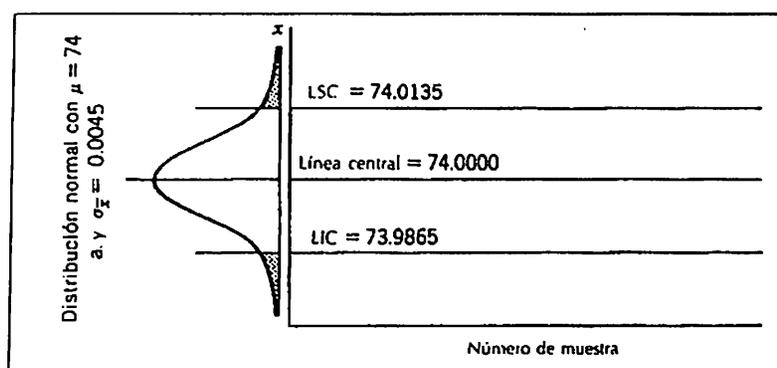


Figura 8.9. Como funciona la gráfica de control

- La amplitud entre límites es inversamente proporcional al tamaño muestral n para un múltiplo de σ .
- La selección de los límites de control equivale a determinar la región crítica para probar la hipótesis

$$H_0: = \mu = 74$$

$$H_1: = \mu \neq 74$$

donde: $\sigma = 0.01$

Sea $|w|$ una estadística muestral que mida alguna característica de calidad.

Que μ_w , sea la media y su desviación estándar es σ_w . Entonces los límites de control serán:

LSC = Límite superior de control

LIC = Límite inferior de control

$$LSC = \mu_w + k\sigma_w;$$

$$LIC = \mu_w - k\sigma_w$$

donde k es: la distancia entre el límite y la posición del parámetro de tendencia central, expresada en desviaciones estándares.

Ya se han mencionado cuáles son los múltiples usos de los gráficos, que son ni más ni menos, una manera precisa de describir el significado del control estadístico, aún así, es consecuente complementar para que su panorámica de utilidad sea lo suficientemente objetiva:

- Vigilar al proceso en línea.
- Como herramienta administrativa de control.
- Como medio de estimación (de parámetro).

Un Factor Importante para el Uso de un Gráfico de Control:

Su Diseño

Que incluye:

- El tamaño de muestra.
- Los límites de control.
- La frecuencia del muestreo.

Consideraciones para el Diseño

- El aumentar el tamaño muestral, reduce la probabilidad del error tipo II, con lo que es mejor para ver si el proceso está en control.
- El conocimiento técnico del proceso.

Selección de Límite de Control

La especificación de los límites de control es una decisión importante en el diseño del gráfico:

- Si se amplía más la distancia entre ellos, y la media (línea central), disminuye el riesgo de probabilidad de error tipo I, (aumentar el número de veces el valor de punto de dispersión).
- Pero también aumentar el riesgo del error tipo II.
- El uso de los límites de control de tres sigmas 3σ da buenos resultados en la práctica.

- El criterio de selección del múltiplo de σ , depende de las consideraciones económicas del muestreo.

Tamaño Muestral y Frecuencia de Muestreo

En general, muestras grandes facilitan la detección de cambios pequeños, como se muestra el gráfico siguiente; sobre el ejemplo de los anillos para pistón: (Fig. 8.10).

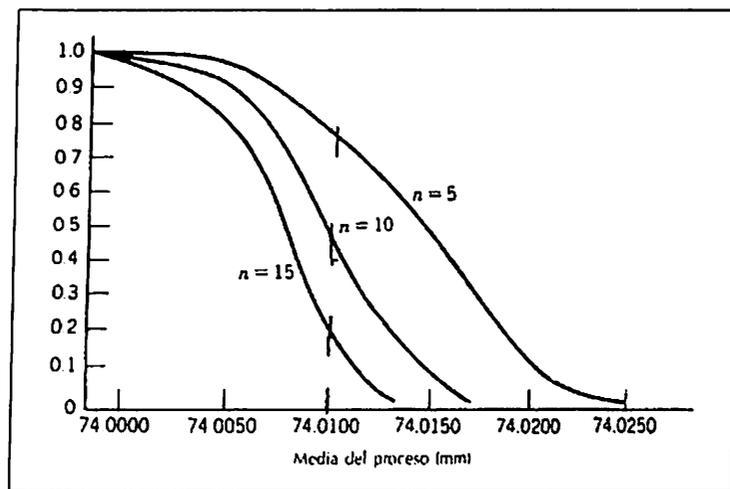


Figura 8.10. Curvas características de operación para un diagrama.

Se observa que:

- La probabilidad de detectar en un rango de variación de la media diagramas entre 74.00 y 74.01, aumentan al incrementarse el tamaño muestral (n).
- Al seleccionar el tamaño muestral, debe considerarse entonces el grado de sensibilidad a detectar. (Lo que se desea detectar, su tamaño).

- Si el tamaño de lo que se desea detectar es grande entonces conviene que el tamaño muestral sea reducido.
- A mayor frecuencia de muestreo, mayor detección; sin embargo, no es económicamente real.
- Si pensamos en distribuir el esfuerzo de muestreo entonces se tendrán muestras pequeñas y mayores frecuencias.
- O muestras grandes, a grandes intervalos.

En la industria de producción en serie, la tercera opción es la más socorrida, apoyada en la metodología moderna.

Subgrupos Racionales

Shewhart estableció que se deben seleccionar subgrupos de manera que si hay causas atribuibles la posibilidad de diferencias entre subgrupos sea máxima, mientras que la posibilidad dentro de un subgrupo sea mínima, estos son los subgrupos racionales.

Los subgrupos racionales deben observar:

- No formar el subgrupo con datos de dos turnos diferentes (el tiempo).
- De diferente unidad de producción (máquina).
- La muestra que conforme al subgrupo después de "cortar" el subgrupo anterior.
- La muestra del subgrupo debe ser del mismo lote.
- Identificar al subgrupo con un sólo inspector de preferencia.

Observación:

El cumplimiento de los criterios anteriores proporciona mejores estimaciones de la desviación estándar, en el caso del gráfico de control por variables.

IX. ANALISIS ESTADISTICO E ILUSTRACION DE LOS GRAFICOS DE CONTROL POR VARIABLES

Clasificación de los Gráficos de Control por Variables

- a) Gráficos por mediciones individuales
- b) Gráficos por medidas de dispersión
- c) Gráficos por medidas de tendencia central

Se trata de ilustrar en detalle cada uno de ellos, en lo que corresponde a: su soporte estadístico matemático; el cálculo y elaboración de sus elementos; sus criterios de uso; su interpretación para el proceso analizado. Y algunos ejemplos de aplicaciones de campo que hemos desarrollado en distintas plantas del sector industrial de la región, en la consecución de checar un proceso y/o mejorarlo, incluyendo algunos comentarios, resultado de esas experiencias. Lo anterior tratando de vincular de una manera atractiva el concepto teórico con lo que es su ejercicio en la práctica real.

Muchas características de calidad se pueden expresar en términos de una medida numérica, como pueden ser de volumen, dimensión, peso, temperatura, presión, a esto se le llama variable.

Los diagramas de control por variables son usados ampliamente, comúnmente aportan mayor información respecto al rendimiento del proceso que los gráficos de control por atributos, así también, suelen permitir el uso de procedimientos de control más eficientes.

Cuando se trata con una característica de calidad que es una variable, es una práctica de rutina, controlar el valor medio y su variabilidad de ella.

El control de la media del proceso, o del nivel de calidad promedio, suele ejercerse con el gráfico de control de medias \bar{X} . También es posible controlar la dispersión (variabilidad) mediante el gráfico de control de la desviación estándar(S); o con un gráfico de control de la amplitud, o gráfico R.

Por lo general se utilizan gráficos de \bar{X} y R por separado para cada característica de calidad que se desea analizar.

Para efecto de cumplir con el objetivo de este documento, revisaremos los puntos que ya mencionamos en los siguientes gráficos de control por variables:

Gráficos $[\bar{X} - R]$

Supóngase que una característica de calidad está distribuida normal (N), con media μ y desviación estándar σ , ambos parámetros conocidos.

Si se tiene una muestra de tamaño n , (X_1, X_2, \dots, X_n) y se distribuye normal:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La media de la muestra \bar{X} es:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Si \bar{x} , tiene una distribución normal, como media μ , su desviación estándar es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La probabilidad de que cualquier \bar{x} , se halla entre:

$$\mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 9.1})$$

$$\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\bar{x}} = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 9.2})$$

es $(1-\alpha)$.

Si se conoce μ y σ , con las ecuaciones (9.1) y (9.2), se podrán calcular los límites de control de un gráfico de control, para medias muestrales.

Se puede sustituir $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ por 3, si es así, se utilizan límites (3σ) tres sigma.

Si una media muestral \bar{X}_t , cae fuera de estos límites, la media del proceso, ya no es μ .

Se supone normalidad en el proceso, pero si existe una distribución subyacente no normal, podrá existir el efecto del supuesto (ver el análisis por el teorema central del límite). En un proceso es común desconocer μ y σ , por lo tanto, las debemos estimar a partir de muestras. El número usual de muestras está entre 20 y 25 para hacer una buena estimación. El número usual de observaciones para el mismo propósito es de cuatro a seis.

Supóngase m muestras, con n observaciones cada una:

Sean (x_1, x_2, \dots, x_n) ; entonces el mejor estimador de μ es:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} \quad (\text{Ec. 9.3})$$

Por lo que $\bar{\bar{X}}$, será la línea central del gráfico \bar{X} .

Para fijar los límites de control, es necesario un estimador de σ .

σ se puede conocer a partir de las desviaciones estándar o las amplitudes de los m muestras; por el método de la amplitud: si $(x_1,$

x_2, \dots, x_n) es una muestra de tamaño n la amplitud R (rango) de esa muestra es:

$$R = X_{\text{máxima}} - X_{\text{mínima}} \quad (\text{Ec. 9.4})$$

La relación entre la amplitud de una muestra y la desviación estándar se llama amplitud relativa (W): $W = \frac{R}{\sigma}$ (Ec. 9.5)

Los parámetros de la distribución de w son funciones de tamaño muestral n por lo que:

- La media de w es d_2
- Un estimador de σ es: $\hat{\sigma} = \frac{P}{d_2}$ donde $P = \bar{R}$

Sean R_1, R_2, \dots, R_m , La amplitudes de m muestras. La amplitud media será:

$$(\text{Ec. 9.6}) \quad \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}; \quad \text{entonces } \hat{\sigma}$$

$$\text{es: } \hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.7})$$

Si el tamaño de n es relativamente pequeño, el método de la amplitud produce un estimador de la varianza, muy robusto como lo es el estimador cuadrático (S^2).

Si se usa a $\bar{\bar{x}}$ como un estimador de μ y $\frac{\bar{R}}{d_2}$ como estimador de σ , para el gráfico de control los parámetros son:

$$\text{Para } k = 3; \quad \text{L.S.C.} = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.8})$$

$$\text{Línea central} = \bar{\bar{x}}$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.9})$$

Si se considera que:

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

es una constante que depende del tamaño muestral, entonces:

$$\text{L.S.C} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.10})$$

$$\text{L.I.C} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.11})$$

donde d_2 y A_2 se pueden obtener en tablas (Apéndice).

Observaciones Importantes:

- La amplitud muestral está relacionada con la desviación estándar del proceso.
- La variabilidad del proceso puede controlarse si graficamos R_1, R_2, \dots, R_m (gráfico de R).
- El parámetro del gráfico R es:

$$\bar{R}$$

= línea central

Para obtener los límites de control es necesario un estimador de σ_R ; si las variables de calidad se distribuyen normal centrada:

$$X \sim N$$

$$W = \frac{R}{\sigma} \quad \text{donde}$$

la desviación estándar de w será d_3 , que es una función conocida de la muestra de su tamaño.

Así; puesto que:

$$R = \omega\sigma$$

la desviación estándar de R es:

$$\sigma_R = d_3\sigma \quad (\text{Ec. 9.12})$$

y como $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_3}$ es posible estimar σ_R

$$\text{con: } \hat{\sigma}_R = d_3 \left[\frac{\bar{R}}{d_2} \right] \quad (\text{Ec. 9.13})$$

Ahora los parámetros del diagrama R con límites de control de 3σ , son:

$$\text{L.S.C} = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.14})$$

$$\text{Línea central} = \bar{R}$$

$$\text{L.I.C} = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.15})$$

Ahora:

$$\text{L.S.C.} = (1 + 3 \frac{d_3}{d_2}) R = R D_4 \quad (\text{Ec. 9.16})$$

$$\text{L.S.C.} = (1 - 3 \frac{d_3}{d_2}) R = R D_3 \quad (\text{Ec. 9.17})$$

Donde:

$$D_4 = \left[1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right]$$

$$D_3 = \left[1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \right]$$

Finalmente los límites de control son:

$$\text{L.S.C.} = \bar{R} D_4 \quad (\text{Ec. 9.18})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{R} D_3 \quad (\text{Ec. 9.19})$$

donde los constantes D_3 y D_4 se dan en el Cuadro A.1

La Gráfica de Control 3-Sigma de Walter Shewhart

Sean (X_1, X_2, \dots, X_n) , las observaciones de los procesos de una distribución normal:

$$X \sim (\mu, \sigma^2)$$

donde:

μ = medias del proceso

σ = desviación estándar desconocida del proceso.

σ^2 = varianza desconocida del proceso.

$$E[x] = \mu \quad (\text{Ec. 9.20})$$

es el valor esperado de x

$$\text{Var}[x] = \sigma^2$$

$$\text{Var}\left[\frac{x}{\sigma}\right] = 1 \quad (\text{Ec. 9.21})$$

\bar{x} = media muestral del proceso

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{Ec. 9.22})$$

$$\text{Var}[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$(\text{Ec. 9.23})$$

$$\text{Var}[\bar{x}] = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{x}} \quad (\text{Ec. 9.24})$$

En una gráfica de control 3- sigma, la "sigma" es la desviación estándar del estadístico que se mostró.

En el gráfico de control de Shewhart participan una línea central y dos líneas - límite.

La primera es el valor esperado del estadístico (si el proceso está dentro de control).

Las segundas son las fronteras que se indican si el proceso está bajo control.

Para un proceso normal hay dos parámetros desconocidos: μ y σ_x

Sea μ_0 = el valor de la media conocido para un control estable (dentro).

entonces para el gráfico 3 - sigma.

$$\text{L.S.C} = \mu_0 + 3\sigma_x \quad (\text{Ec. 9.25})$$

$$\text{L.I.C.} = \mu_0 - 3\sigma_x \quad (\text{Ec. 9.26})$$

Donde:

L.S.C. = Límite Superior de Control.

L.I.C. = Límite Interior de Control.

Considerando las reglas de corrida de la Western Electric elaboradas en 1950.

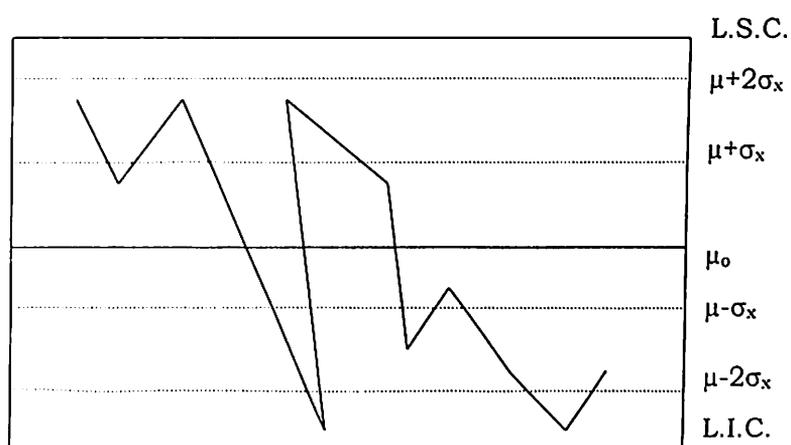


Figura 9.1. Representación gráfica de puntos de control.

El proceso está fuera de control si alguno de los siguientes puntos se cumple. (Control estadístico de procesos, 1993. Curso CIMAT).

- Si un punto se muestra más allá de un límite de control.
- Si dos de tres puntos consecutivos están más allá de 2 - sigma, donde dos de los tres, deben estar del mismo lado de la línea central.

- Si cuatro de cinco puntos están más allá de 1- sigma, donde los cuatro puntos deben estar en el mismo lado de μ_0 .
- Ocho puntos consecutivos, todos del mismo lado de μ_0 .

Esto ha sido comprobado experimentalmente, cumpliendo el supuesto que el proceso se comporta normal.

Si se desea monitorear al parámetro Ω correspondiente al proceso, formamos un subgrupo y estimamos Ω con w .

$$\text{L.S.C} = E_0 [w] + 3\sqrt{\text{var}(w)} \quad (\text{Ec. 9.27})$$

$$\mu_0 = E_0(w)$$

$$\text{L.I.C} = E_0 [w] - 3\sqrt{\text{var}(w)} \quad (\text{Ec. 9.28})$$

donde:

$E_0(w)$ valor esperado de w , considerando al proceso bajo control.

$$\Omega = \Omega_0$$

Similarmente:

$\text{Var} [w]$ = varianza de w , con el proceso bajo control.

Si consideramos:

$$H_0 = \Omega = \Omega_0 \text{ "proceso en control"}$$

$$H_1 = \Omega \neq \Omega_0 \text{ "proceso fuera control"}$$

En el caso de una distribución normal

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$H_0; \mu = \mu_0$$

$$H_1; \mu \neq \mu_0$$

La prueba de bondad compara a \bar{x} con las constantes rechazadas:

$$H_0 \text{ si } \bar{x} \geq C_1 \text{ o si } \bar{x} < C_2$$

	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$
$x > \text{L.S.C.}$	Error tipo I	Probabilidad=(1- β)
$x < \text{L.I.C.}$	Probabilidad = α Falsa alarma	
$\text{L.I.C.} \leq x \leq \text{L.S.C.}$	Probabilidad = 1- α	Error tipo II Probabilidad = β
	Proceso en control	Proceso fuera de control

$$\text{Prob} [x > \text{L.S.C.} \text{ o } x < \text{L.I.C.} \mid \mu = \mu_0] = \alpha$$

$$\text{Prob} [\text{concluir que el proceso está fuera de control} \mid \text{el proceso está en control}] = \text{riesgo del productor}$$

$$\text{Prob} [\text{L.I.C.} \leq x \leq \text{L.S.C.} \mid \mu = \mu_0] = 1 - \alpha = P_a(\mu = \mu_0)$$

$$\text{Prob} [\text{L.I.E.} \leq x \leq \text{L.S.C.} \mid \mu = \mu_0] = \beta = P(\mu = \mu_0)$$

$$\text{Prob} [\text{concluir que el proceso está en control} \mid \text{el proceso está fuera de control}] = \beta = \text{riesgo del cliente}$$

$$\text{Prob} [\text{L.I.E.} \leq x \leq \text{L.S.C.} \mid \mu = \mu_1] = \beta = P(\mu = \mu_0) = P_a(\mu = \mu_1)$$

donde L.I.E. = límite inferior de especificación

$$\text{si: } \mu_1 \neq \mu_0$$

$$\mu_0 = 100$$

$$\mu_1 = 101 \text{ ó}$$

$$\mu_1 = 95$$

Si se muestra β contra μ , se forma la curva de operación característica ("OC")

$$P_a(\mu = \mu_0) = 1 - \alpha$$

donde α es:

α = probabilidad de concluir, que el proceso está fuera de control, cuando no lo está

$$\alpha = \text{Prob}[\bar{x} \leq \text{L.I.C.} \text{ o } \bar{x} > \text{L.S.C.} \mid \mu = \mu_0]$$

$$\alpha = \text{Prob}[\bar{x} \leq \text{L.I.C.} \mid \mu = \mu_0] + \text{Prob}[\bar{x} > \text{L.S.C.} \mid \mu = \mu_0]$$

$$\text{se tiene que: L.S.C} = \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

para $\mu = \mu_0$

$$\alpha = P\left[\bar{x} > \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right] + P\left[\bar{x} < \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\alpha = P\left[\bar{x} - \mu_0 > \mu_0 - \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right] + P\left[\bar{x} < \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\alpha = P\left[\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > 3 \frac{\sigma_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] + P\left[\bar{x} < \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$

$$X_i \sim N(\mu_0, \sigma_0)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\bar{x} - E[\bar{x}]}{\sqrt{\text{Var}(\bar{x})}} \sim N(0,1)$$

$$\alpha = P[Z > 3] + P[Z < -3]$$

$$\alpha = 0.00135 + 0.00135 \quad (\text{ver estos valores en tablas})$$

$$\frac{1}{0.0027} = 370.73$$

Significa que existirá una falsa alarma cada 370.73 subgrupos.

Si se usan las reglas de Western Electric entonces existirá una falsa alarma cada 92 subgrupos.

Por lo tanto esta opción es mejor ya que disminuye la probabilidad del error tipo II. Y también la probabilidad de falla.

Gráficos de Control Medias - Rangos

$$E_0[R]$$

Para procesos 3σ :

$$\text{L.S.C.} = E_0[R] + 3 \cdot \text{Var}(R) \quad (\text{Ec. 9.29})$$

$$\text{L.I.C.} = E_0[R] - 3 \cdot \text{Var}(R) \quad (\text{Ec. 9.30})$$

$$\sigma = \sigma_x$$

Para un proceso normal:

$$E_o [R] = d_2 \sigma_x$$

$$\sqrt{\text{Var}(R)} = d_3 \sigma_x$$

donde d_2 y d_3 son constantes (y estimadores) dependientes de n .

$$\text{L.S.C.} = d_2 \sigma_o + 3 d_3 \sigma_o \quad (\text{Ec. 9.31})$$

$$\text{L.S.C.} = \sigma_o [d_2 + 3d_3] \quad (\text{Ec. 9.32})$$

$$d_2 + 3d_3 = D_2$$

$$\text{L.S.C.} = D_2 \sigma_o \quad (\text{Ec. 9.33})$$

Por lo que para el L.I.C. :

$$\text{L.I.C.} = d_2 \sigma_o - 3d_3 \sigma_o$$

$$\text{L.I.C.} = \sigma_o [d_2 - 3d_3]$$

$$[d_2 - 3d_3] = D_1$$

$$\text{L.I.C.} = D_1 \sigma_o \quad (\text{Ec. 9.34})$$

$$R = \text{L.S.C} - \text{L.I.C}$$

$$R = (d_2 \sigma_o + 3d_3 \sigma_o) - (d_2 \sigma_o - 3d_3 \sigma_o)$$

$$R = d_2 \sigma_o + 3d_3 \sigma_o - d_2 \sigma_o + 3d_3 \sigma_o$$

$$R = 6d_3 \sigma_o \quad (\text{Ec. 9.35})$$

Se asume que m subgrupos están disponibles y cada uno es de tamaño n .

$$(R_1, R_2, \dots, R_m)$$

Se estima $E[R]$ con

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

\bar{R} = línea central del gráfico

$$\text{L.S.C.} = \bar{R} + 3 \sqrt{\text{Var}(R)} \quad (\text{Ec. 9.36})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{R} - 3 \sqrt{\text{Var}(R)} \quad (\text{Ec. 9.37})$$

$$E[R] = d_2 \sigma_x \text{ o bien } \sigma_x = \frac{E[R]}{d_2}$$

Como se está usando \bar{R} como estimador de $E[R]$ se puede estimar σ_x con:

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

esto es el valor σ_0 para proceso en línea (serie)

entonces:

$$\sqrt{\text{Var}(R)} = d_3 \hat{\sigma}_x = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.38})$$

$$\text{L.S.C.} = R + 3d_3 \frac{R}{d_2}$$

$$\text{L.S.C.} = R \left[1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right]$$

$$\left[1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right] = D_4$$

$$\text{L.S.C.} = D_4 R ; D_4 = \frac{D_2}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.39})$$

Por lo que para el otro límite:

$$\text{L.I.C.} = R - 3d_3 \frac{R}{d_2}$$

$$= R \begin{bmatrix} 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \end{bmatrix} = D_3$$

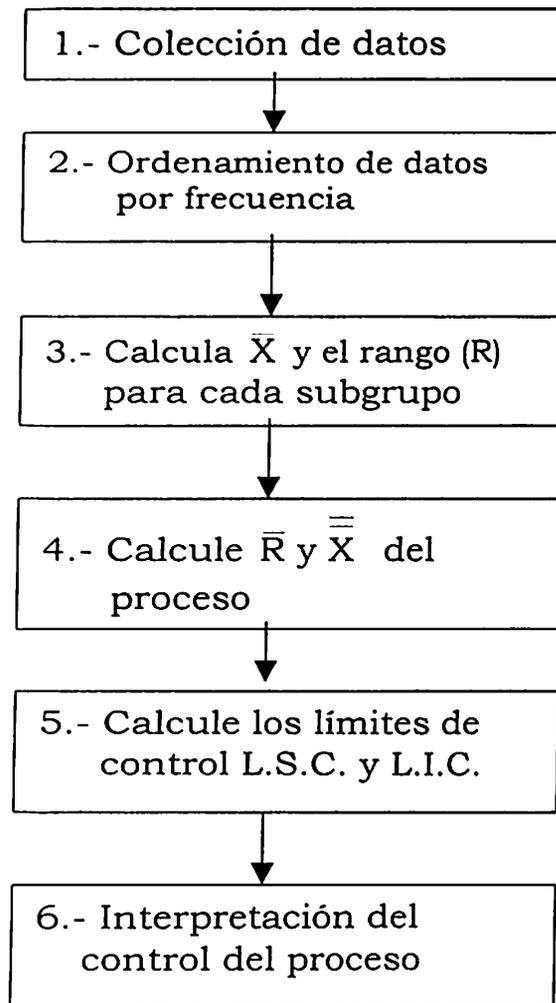
$$\text{L.I.C.} = D_3 R; D_3 = \frac{D_1}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.40})$$

Elaboración de los gráficos \bar{X} - R

Decidir sobre la construcción del gráfico implica:

- a). El objetivo a lograr
- b). La elección de la variable
- c). Elección del criterio de información de datos representativos:
 - Tamaño de muestra
 - Tipo de muestreo
 - Frecuencia del muestreo
 - Método del registro de datos
 - Método de medición

Construcción del gráfico:



- a) Analice el conjunto de datos en la gráfica de rango . (R).
- b) Analice el conjunto de datos en la gráfica de medias (\bar{X}).
- c) Identifique y corrija las causas vitales.
- d) Recalcule límites de control.

Proceso de Control en Detalle:

- Determinar el subgrupo racional adecuado, se sugiere que sea $n = 5$, el criterio de Shewhart deriva de que la distribución se acerque a la normal aunque el universo no represente una curva normal.

Los subgrupos son tomados de 2 a 25, con $\eta = 3$ ó $\eta = 4$ ó $\eta = 5$ en forma consecutiva, representando:

- Pieza de un mismo equipo
- La frecuencia entre subgrupos varía de acuerdo a las características del proceso y la tecnología usada de muestreo
- El número de subgrupo que se sugiere es entre 20 y 25
- Establece el formato de integración y ordenamiento de datos:
- Los valores de \bar{X} y R se registran en forma vertical
- Calcula \bar{X} y R para cada subgrupo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

R = valor mayor - valor menor

- Trace la gráfica de rangos y promedios
- Calcule \bar{R} y la media de medias:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}, \text{ y } \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{n}$$

- Calcule los límites de control

$$\left. \begin{array}{l} \text{L.S.C.R} = D_4 \bar{R} \\ \text{L.I.C.R} = D_3 \bar{R} \end{array} \right\} \text{ Para el gráfico R}$$

$$= R \begin{bmatrix} 1 - 3 & d_3 \\ & d_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 3 & d_3 \\ & d_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 - 3 & d_3 \\ & d_2 \end{bmatrix} = D_3$$

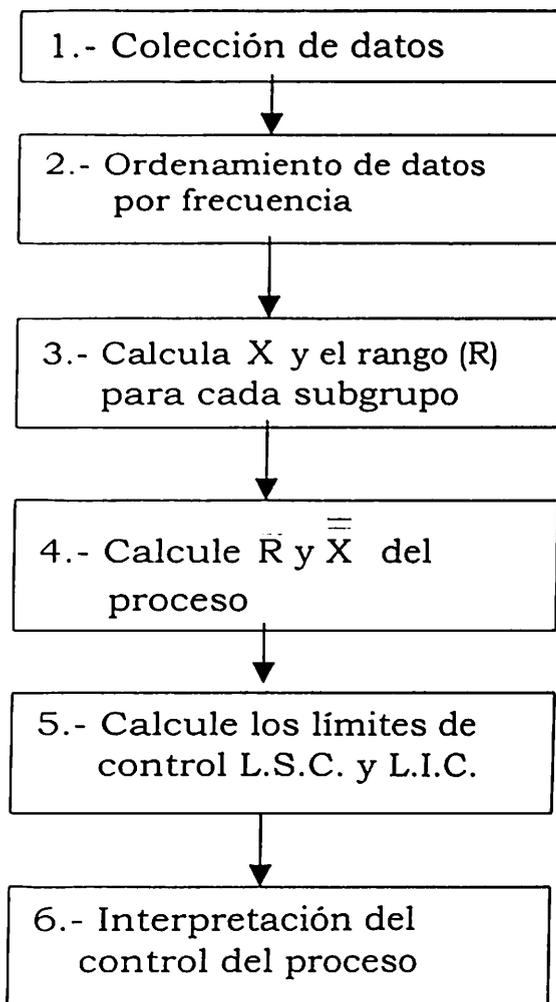
$$\text{L.I.C.} = D_3 R; D_3 = \begin{matrix} D_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (\text{Ec. 9.40})$$

Elaboración de los gráficos X - R

Decidir sobre la construcción del gráfico implica:

- a). El objetivo a lograr
- b). La elección de la variable
- c). Elección del criterio de información de datos representativos:
 - Tamaño de muestra
 - Tipo de muestreo
 - Frecuencia del muestreo
 - Método del registro de datos
 - Método de medición

Construcción del gráfico:



- a) Analice el conjunto de datos en la gráfica de rango . (R).
 - b) Analice el conjunto de datos en la gráfica de medias (\bar{X}).
 - c) Identifique y corrija las causas vitales.
 - d) Recalcule límites de control.
- Arrows in the original image indicate feedback loops: from 'b)' to 'd)', from 'c)' to 'd)', and from 'd)' back to 'a)' and 'b)'.

Proceso de Control en Detalle:

- Determinar el subgrupo racional adecuado, se sugiere que sea $n = 5$, el criterio de Shewhart deriva de que la distribución se acerque a la normal aunque el universo no represente una curva normal.

Los subgrupos son tomados de 2 a 25, con $\eta = 3$ ó $\eta = 4$ ó $\eta = 5$ en forma consecutiva, representando:

- Pieza de un mismo equipo
- La frecuencia entre subgrupos varía de acuerdo a las características del proceso y la tecnología usada de muestreo
- El número de subgrupo que se sugiere es entre 20 y 25
- Establece el formato de integración y ordenamiento de datos:
- Los valores de X y R se registran en forma vertical
- Calcula X y R para cada subgrupo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$R = \text{valor mayor} - \text{valor menor}$

- Trace la gráfica de rangos y promedios
- Calcule \bar{R} y la media de medias:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}, \text{ y } \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{n}$$

- Calcule los límites de control

$$\text{L.S.C.R} = D_4 \bar{R}$$

$$\text{L.I.C.R} = D_3 \bar{R}$$

} Para el gráfico R

$$\text{L.S.C.}_{\bar{x}} = \bar{x} + A_2 \bar{R}$$

$$\text{L.I.C.}_{\bar{x}} = \bar{x} - A_2 \bar{R}$$

Obtenga los datos de los constantes en la tabla 7 en el anexo, grafique los parámetros y los puntos (datos) de muestra.

Interpretación del Control del Proceso

Para el análisis:

Los puntos que se graficaron muestran una cierta cantidad de variación que podrá deberse a causas vitales o triviales.

La identificación de estas causas, nos llevaran a decidir como eliminarlos en el proceso.

El hecho de que al menos un punto caiga fuera de límites, nos dice que algo anda mal en el proceso.

La variación o fluctuación debe ser normal en el gráfico.

Reglas de Interpretación del Gráfico

- La presencia de uno o más puntos más allá de los límites de control es evidencia de inconsistencia en el proceso.
- Un punto fuera del limite de control nos dice que:
- El límite está mal calculado.
- La variación de una pieza a otra (dispersión) ha empeorado.

- El sistema de medición ha cambiado.
- Adhesión a las líneas de control:
- a) Si hay adhesión a la línea central:

$$\frac{\text{Distancia entre L.S.C y L.I.C.}}{3}$$

Si una cantidad mayor a $2/3$ del total de los puntos se encuentra dentro del tercio medio, hay adhesión.

Significa que:

- Los límites de control han sido mal calculados
- Los datos han sido alterados
- Se mezcló algún dato que no corresponde

Si hay una cantidad mayor a $1/3$ y se encuentra dentro de los tercios exteriores, existe adhesión a los límites de control.

Significa que:

- Los límites de control han sido mal calculados.
- El proceso de muestreo es tal, que los subgrupos contienen mediciones de 2 o más factores diferentes (heterogeneidad) .

b) Series:

Una serie es una sucesión de puntos que indican la iniciación de una tendencia del proceso.

- Cuando 7 o más puntos consecutivos se alinean hacia un lado del promedio hay una corrida.
- Si 7 o más puntos consecutivos se presentan con valores crecientes o decrecientes, hay una tendencia.
- Una serie por arriba del rango promedio (\bar{R}) significa:
 - Mayor dispersión de los resultados, la cual se puede deber a una causa irregular (nuevo lote, falla del equipo, etc.)
 - Un cambio en el sistema de medición.
- Una serie por abajo del rango promedio (\bar{R}).
 - Menor dispersión de los resultados.
 - Un cambio en el sistema de medición.

Resumen:

Es conveniente que los iniciadores, realicen "a pie", gráficos antes que usar un paquete de cómputo para su mayor comprensión de la herramienta, siguiendo los siguientes pasos:

- Preparar hoja de datos.
- Hacer subgrupos racionales y tamaños de muestra.
- Preparar los impresos para gráficos en blanco.
- Calcule valores de \bar{X} .
- Represente \bar{X} .
- Calcule valores de R.
- Represente R.

- Calcule \bar{X} (línea central).
- Calcular R (línea central).
- Calcule los límites para el gráfico \bar{X} .
- Calcule los límites para el gráfico R y representarlos.
- Anote los puntos y haga el polígono.
- Análisis del gráfico.
- Toma de decisiones.

Es muy importante no confundir los límites de control con los límites de especificaciones.

Se ha comentado que el que la variabilidad esté bajo control no implica que se esté complicando en la especificación.

Algo más sobre la Interpretación del Gráfico: (Gutiérrez, 1992).

El utilizar el gráfico de control, obliga a establecer criterios para evaluar si la situación es o no, normal como ya se vio anteriormente, sin embargo es necesario, dada su importancia, de ahondar más en el tema.

Se pueden establecer seis patrones de comportamiento de puntos en un gráfico, que además se acompañan de posibles causas de dichos comportamientos; así también de algunas pruebas estadísticas para confirmar la existencia del patrón en cuestión.

Patrón 1. Brincos

A. Causas que pueden afectar un gráfico, si la variabilidad es estable.

(para X y por atributos).

- Cambio en la producción de materiales (ensambles).
- Nuevo trabajador o maquina.
- Modificación del procedimiento de producción.
- Cambio en el método o dispositivo de inspección.

B. Causas de afectación para la corte R.

- Cambio en el material (lote).
- Cambio en el procedimiento (Ej. velocidad).
- Cambio en el método de inspección.

Pruebas para Detectar un Cambio en el Nivel (Brinco)

Prueba 1. Un punto más allá de la zona A (Figura 9.2).

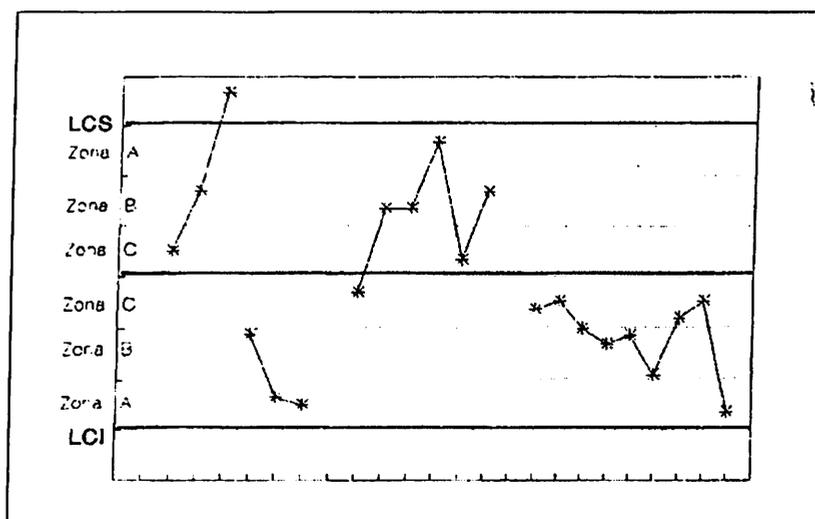


Figura 9.2. Cuatro brincos en el nivel de un proceso.

Prueba 2. Dos o tres puntos consecutivos en la zona A, o más allá.

Prueba 3. Cuatro o cinco puntos consecutivos en la zona B.

Prueba 4. Nueve puntos consecutivos en la zona C, o más allá.

Patrón 2. Tendencias

Tendencia en el nivel del proceso:

A. Algunas causas que pueden afectar el gráfico \bar{X} , de esta manera (también afecta las de atributos).

- Deterioro gradual del equipo de producción.
- Desgaste de herramientas (cortes).
- Acumulación de producto de desperdicio en línea.
- Calentamiento de máquinas.

B. Algunas causas que pueden afectar el gráfico R.

- Mejora o empeora de la habilidad del empleado.
- Fatiga del operario.
- Cambio gradual en la homogeneidad de la materia prima.

Pruebas para Detectar Tendencias

Prueba. Seis puntos consecutivos en aumento o disminución

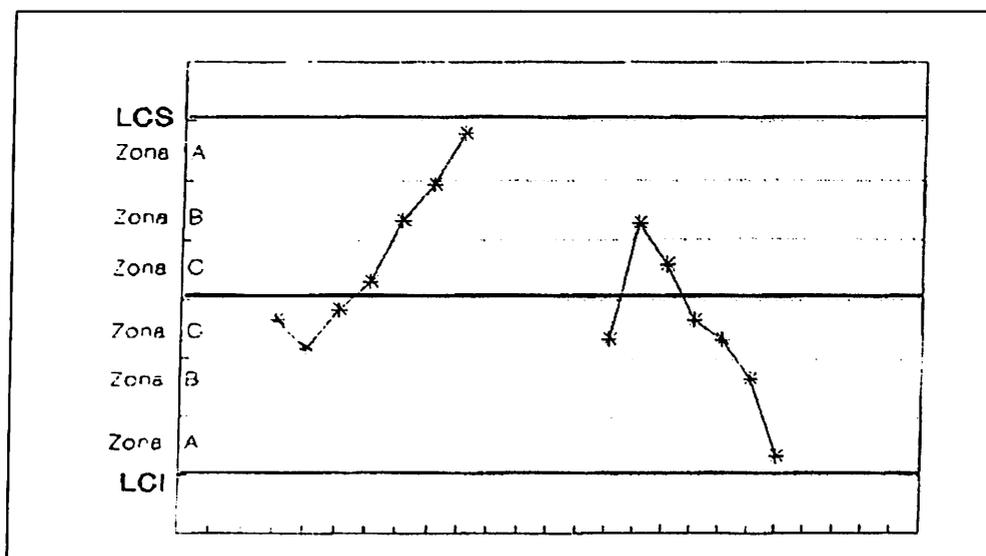


Figura 9.3. Tendencia en el nivel de un proceso

Patrón 3. Periodicidad

Ciclos recurrentes

A. Algunas causas que pueden afectar el gráfico \bar{X} y las de atributos.

- Temperatura u otros cambios periódicos en el ambiente.
- Diferencias en los dispositivos de medición o pruebas que se utilizan en cierto orden.
- Rotación regular de máquinas u operarios.
- Efecto sistemático producido por dos máquinas, operarios o vendedores que se usan alternadamente.

B. Algunas causas que pueden afectar la carta R.

- Mantenimiento preventivo programado.
- Fatiga de trabajadores o secretarias.

Prueba. Catorce puntos consecutivos alternando entre altos y bajos

(Figura 4.4)

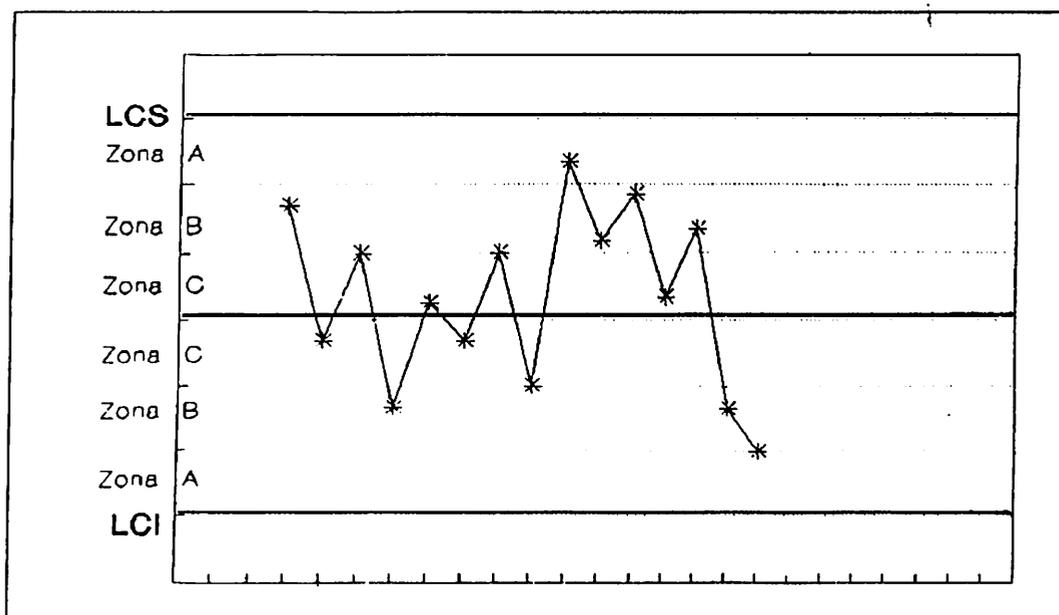


Figura 9.4. Ciclos recurrentes en un proceso.

Patrón 4. Alta proporción de puntos cerca o fuera de los límites.(Figura 9.5)

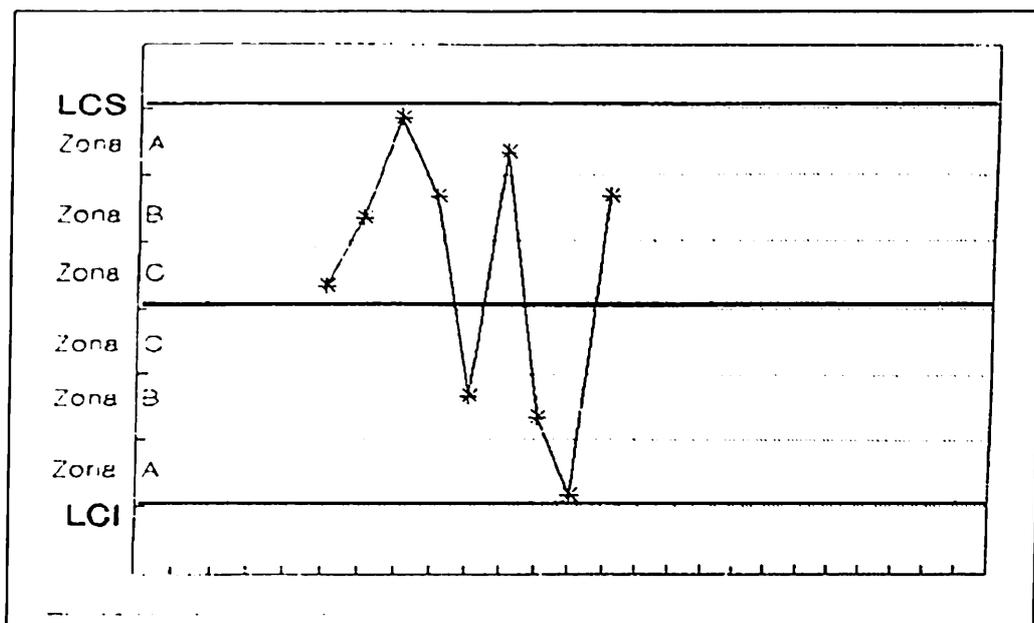


Figura 9.5. Alta proporción de puntos cerca de los límites.

- A. Algunas causas que pueden afectar al gráfico \bar{X} o por atributos.
- Sobre control.
 - Diferencia sistemática en la calidad del material o en los métodos de prueba.
 - Control de dos o más procesos en el mismo gráfico (uno con resultados mayores y el otro menores).
- B. Algunas causas que pueden afectar el gráfico R.
- Mezcla de materiales de calidad diferentes.
 - Diferentes trabajadores utilizando el mismo gráfico.
 - Datos de proceso operando bajo diferentes condiciones dibujados en el mismo gráfico.

Prueba. Ocho puntos consecutivos a ambos lados de la línea central con ninguno en la zona C.

Patrón 5. Falta de variación.

A. Algunas causas que pueden afectar a todos los gráficos (\bar{X} y por atributos).

- Una equivocación en el cálculo de límites.
- Agrupamiento en un mismo subgrupo (datos por variantes de universos con medias muy diferentes).
- "Cuchareo" de resultados.
-

Prueba. Quince puntos consecutivos en la zona C, arriba o abajo de la línea central (Figura 9.6)

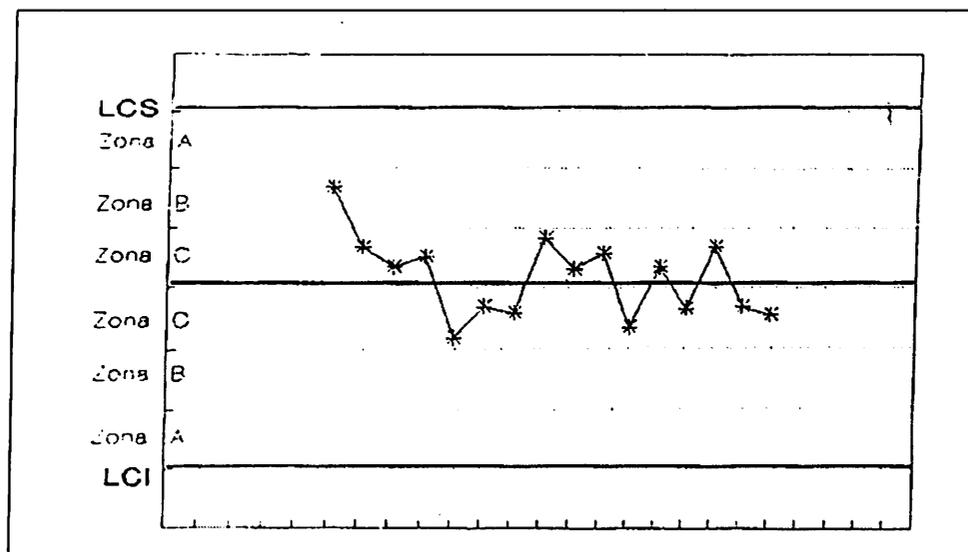


Figura 9.6. Falta de variabilidad en los puntos de una carta de control.

Uso de los Gráficos X - R

- Cuando la característica del proceso que se ha de controlar es variable continua.
- Se utiliza para observar los cambios en la media de una distribución, así también el grado de dispersión (R).
- Su uso conjunto (\bar{X} - R), nos permite identificar el estado cambiante de un proceso en forma de distribución.
- Los gráficos (\bar{X} - R), nos da la máxima información técnica, para un análisis técnico y los estudios de la capacidad del proceso.
- Aplica muy bien en los inicios del control de calidad.

Ilustración de la Construcción del Gráfico con un Caso Real en un Proceso de Manufactura en una Planta Ensambladora (FORD)

- Selección en el tamaño del subgrupo $n = 5$
- La frecuencia de muestreo del subgrupo.
- El número de subgrupos $m = 25$. (Figura 9.7)

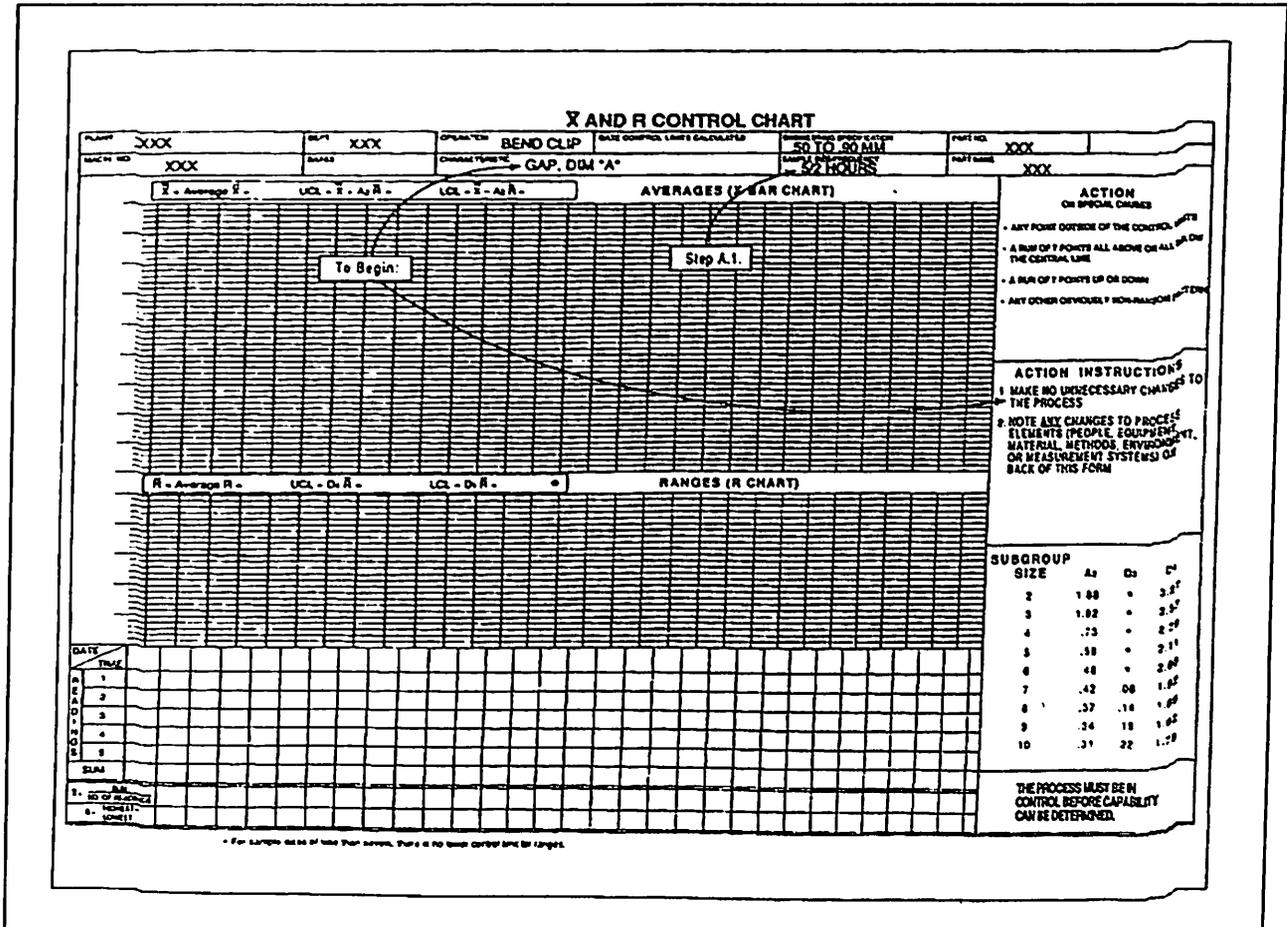


Figura 9.7. Gráfica de \bar{X} y R.

- Se prepara el gráfico de control y los datos a graficar.
- Se calcula: \bar{X} ; R, de cada subgrupo.

Es conveniente hacer notar que estos formatos no son únicos pero si los que son usados por estas empresas (Statistical Process Control, 1995. Chrysler -GM – FORD) y que podrán existir otros diferentes.

(Figuras de la 9.7 a la 9.10)

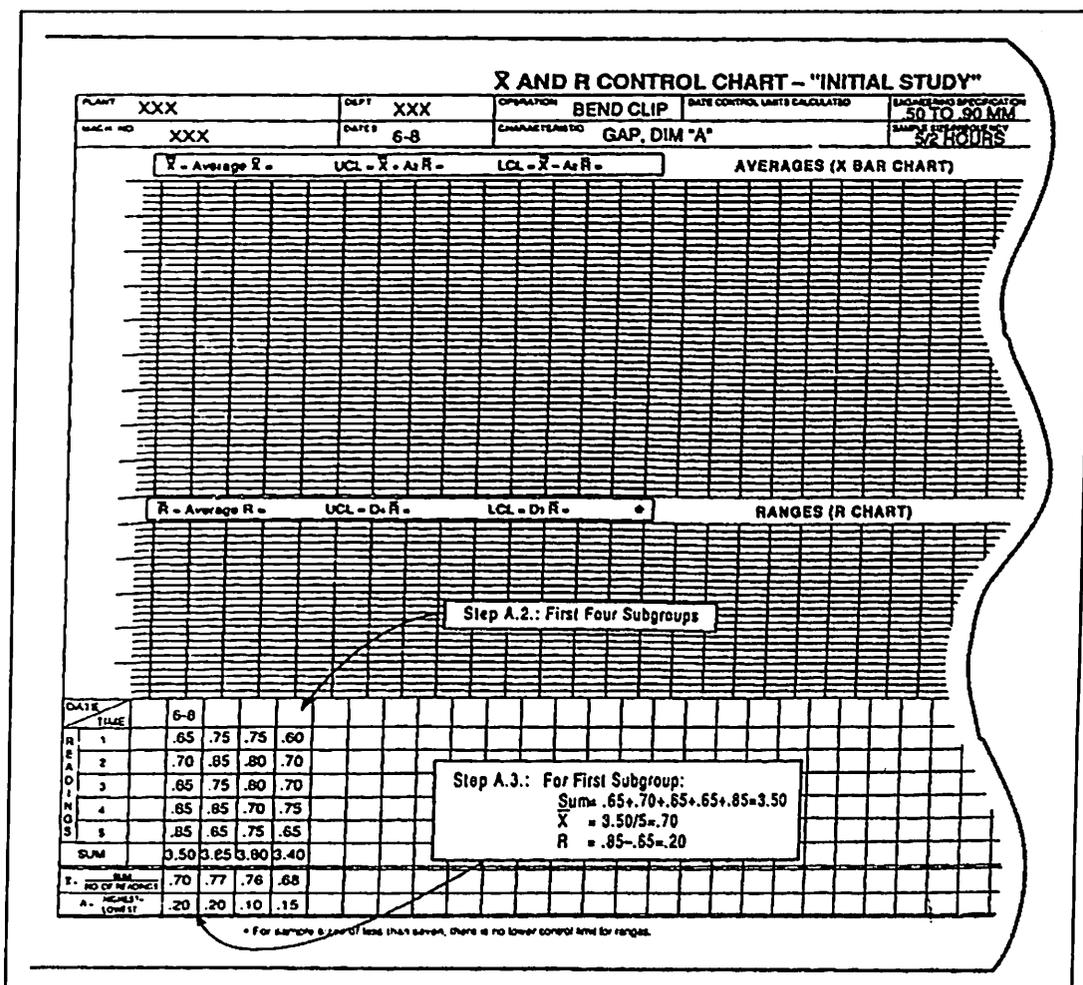


Figura 9.8. Gráfica \bar{X} y R. de datos de arranque.

- Seleccione las escalas para el gráfico .
- Anote los promedios y rangos en el gráfico. (Figura 9.9)

Formato del Statistical Process Control. 1995. Chrysler- FORD- GM

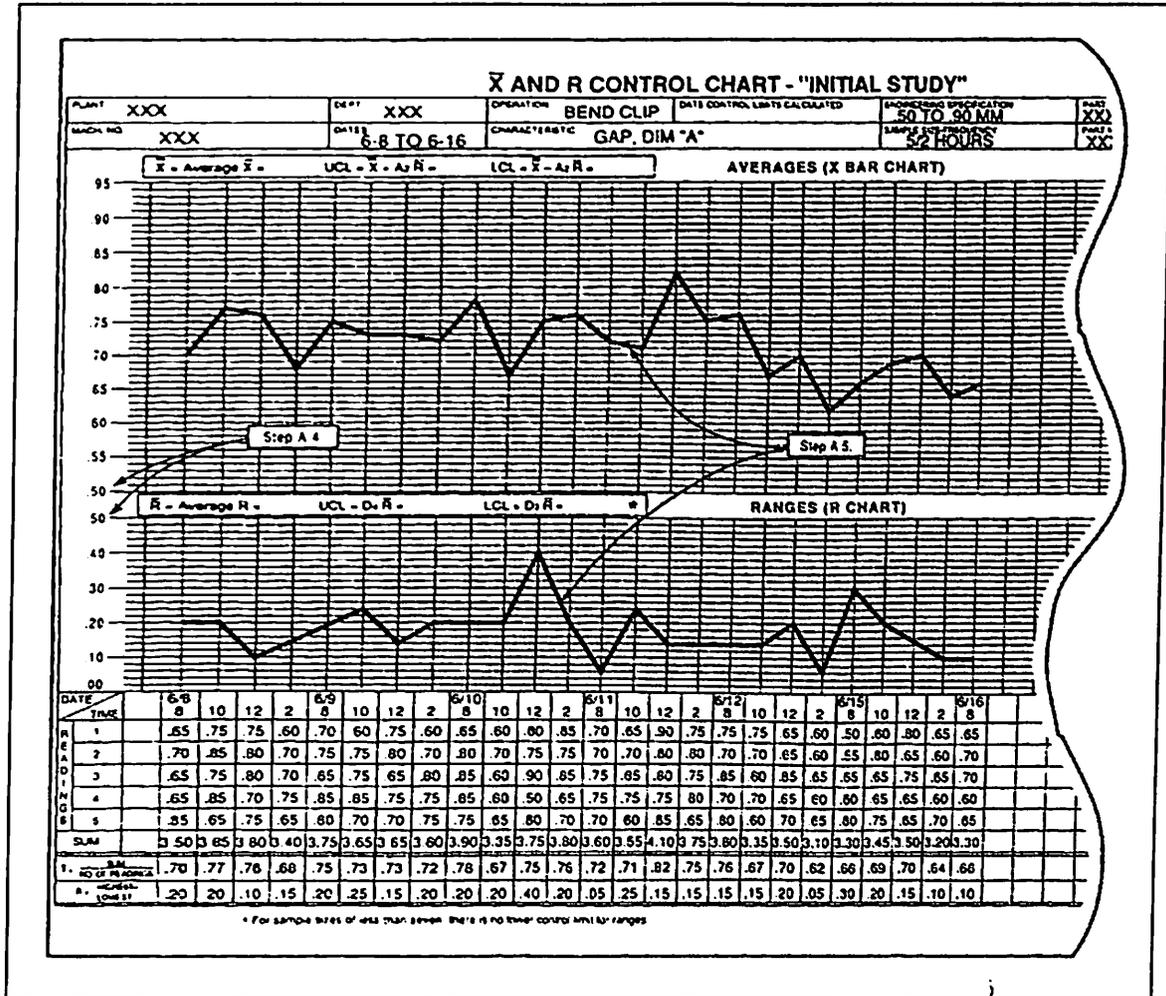


Figura 9.9. Gráfica \bar{X} y R. del estudio inicial.

- Calcule los límites de control.
- Calcule \bar{X} ; R
- Grafique los parámetros. (Figura 9.10)

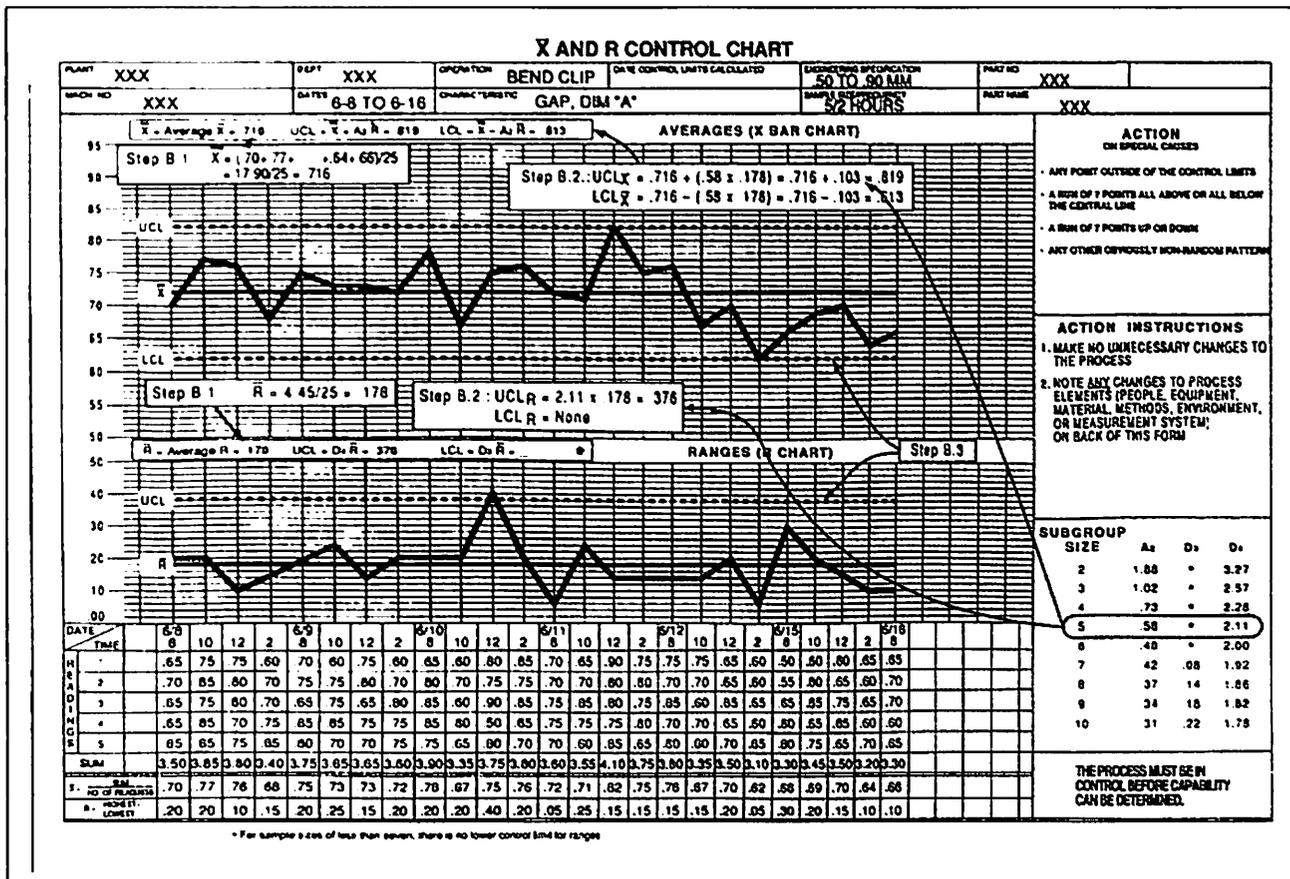


Figura 9.10. Gráfica \bar{X} y R. con límites de control.

- Analice el gráfico:
- Analice los datos del gráfico R.

Para el Gráfico se Aprecia:

No hay fluctuación normal por lo que el proceso no está del todo estable:

- Hay puntos (uno), sobre cada una de las líneas de control.
- En el gráfico de media se aprecia una tendencia por clarificarse.

Gráficos de Control Medinas - Rangos \tilde{X} - R

Es la mediana otra medida de la tendencia central para características de calidad que se deseen estudiar.

Es usada conjuntamente con el rango (R) para el monitoreo de la dispersión de la distribución.

Se le asocia comúnmente con un número de subgrupos, pequeños, pues su calidad de estimación, decrece al aumentar con el aumento del tamaño de la muestra o del número de subgrupos (dado que la mediana es el número medio de un grado de valores, la eficiencia es mayor para tamaños-muestra que para tamaños no comunes; para muestras grandes la eficiencia se aproxima en 0.637 comparada con la media aritmética (Dixon y Massey, 1969)).

El gráfico \tilde{X} - R, tiene el mismo uso que \bar{X} - R, sin embargo, en trabajos mostrados por Ferrell (1953) se concluye que estos gráficos, de medianas, medias- rangos, mediana de medias rangos y medianas-rangos, son mas ventajosos en sus apreciaciones y resultados que en el uso de gráficos de medias convencionales, media de medias o medias-rangos.

Análisis Estadístico del Gráfico (\bar{X} -R)

Cálculos de los Límites de Control

Dado que ya establecimos para el gráfico \bar{X} -R, la expresión:

$$\hat{\mu} \pm 3 \hat{\sigma}_x$$

considerando:
$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_x}{e_4}$$

donde e_4 , como una función del tamaño del subgrupo está en tablas (ver tabla H en el anexo).

e_4 = factor constante de proporcionalidad.

Tablas para el Cálculo de Medianas - Rangos:

Una aplicación común del gráfico- medianas permite el uso de la mediana de rangos (\tilde{R}) y la relación:

$$\hat{\sigma} = \frac{\mu_R}{d_4}$$

ya vista en la parte de gráficos \bar{X} -R.

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_x}{e_4} \longrightarrow \text{Límites de control} = \hat{\mu} \pm 3 \hat{\sigma}_x$$

$$= \bar{x} \pm 3e_4 \hat{\sigma} \circ \bar{X}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\mu_R}{d_4} \longrightarrow = \bar{x}_0 \pm 3e_4 \left[\frac{\tilde{R}}{d_4} \right] \circ \bar{X}$$

$$= \bar{x}_0 \tilde{x} \pm A_5 \tilde{R} \circ \bar{X}$$

$$\text{L.S.C.} = \bar{x} \pm A_5 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.42})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{x} - A_5 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.43})$$

donde $A_5 = \frac{3e_4}{d_4}$ y vale como una función del tamaño del subgrupo, y aparecen en la tabla G en el Apéndice.

Con el Promedio de Rangos:

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_x}{e_4} \rightarrow \text{Límites de control} = \mu \pm 3 \hat{\sigma}_x$$

$$= \bar{X} \pm 3e_4 \hat{\sigma}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\mu_R}{d_2} \rightarrow = \bar{X} \pm 3e_4 \hat{\sigma}$$

$$= \bar{X} \pm 3e_4 \left[\frac{\bar{R}}{d_2} \right]$$

$$= \bar{X} \pm A_6 \bar{R}$$

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + A_6 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.44})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - A_6 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.45})$$

donde $A_6 = \frac{3e_4}{d_2}$ y vale como función del tamaño del subgrupo (n).

Los límites de control también pueden calcularse a partir de un coeficiente, cuyo valor depende de n, las fórmulas son:

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + m_3 A_2 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.46})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - m_3 A_2 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.47})$$

donde el producto $m_3 A_2$, es el coeficiente mencionado, cuyo valor se obtiene en la tabla y su valor es A_6 . (Cuadro A.2)

Gráfico de control medianas - rangos (\bar{X} - R) a partir de la mediana del rango (\bar{R}).

- Lo anterior es posible ya que \bar{R} también puede ser un elemento suficiente para estimar la variación:

$$\text{Para } \tilde{X}: \tilde{X} \pm m_3 A_3 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.48})$$

$$\text{Para } \bar{X}: \bar{X} \pm A_3 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.49})$$

$$\text{Para } R: \text{L.S.C.} = D_6 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.50})$$

$$\text{L.I.C.} = D_5 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.51})$$

Los valores pueden encontrarse en la misma tabla de coeficientes anterior.

Observación:

- Que $\tilde{X}, \bar{X}, \bar{R}$, son estimadores menos precisos de la población N , que \bar{X}, \bar{X} y \bar{R} , respectivamente, en un proceso controlado, pero este efecto es pequeño, cuando el proceso no está en control y es común que los primeros aumenten su precisión de la estimación.
- Cuando estimamos $\hat{\sigma} = \frac{R}{d_m}$, donde d_m es un coeficiente utilizado para estimar σ a partir de \bar{R} , su valor depende de n y está en el mismo Cuadro A.2

Como ya se comentó, se ha observado que \bar{X} y \bar{R} , son mejores estimadores, es decir más precisos que el criterio de \bar{R} o \bar{X} y de hecho son los utilizados en los procesos, por ello, a continuación, los gráficos de medianas - rangos, con un ejemplo de aplicación de un proceso de manufactura.

Ilustración de la Construcción del Gráfico \bar{X} - R (Tomado del Statistical Process Control, 1995. FORD)

En un proceso de manufactura, en el departamento de maquinado, se monitorea la operación de "cortado". Las especificaciones de ingeniería para la operación son (46.05 - 45.05 cm) el muestreo de los $m = 26$ y $n = 5$, la frecuencia de muestreo es cada hora durante el turno.

1. Se calcula para la tabla de datos ($\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$) ;
2. Calculemos $\bar{\bar{X}}$.
3. Se calcula R para los subgrupos (R_1, R_2, \dots, R_m)
4. Calculamos \bar{R} .
5. Calculamos los límites de control para el gráfico de rango.

$$\text{L.S.C } \bar{x} = \bar{\bar{X}} + \bar{A}_2 \bar{R}$$

$$\text{L.I.C } \bar{x} = \bar{\bar{X}} - \bar{A}_2 \bar{R} \text{ y}$$

$$\text{L.S.CR} = D_4 \bar{R}$$

$$\text{L.I.C R} = D_3 \bar{R} \quad (\text{Figuras 9.11, 9.12, 9.13}).$$

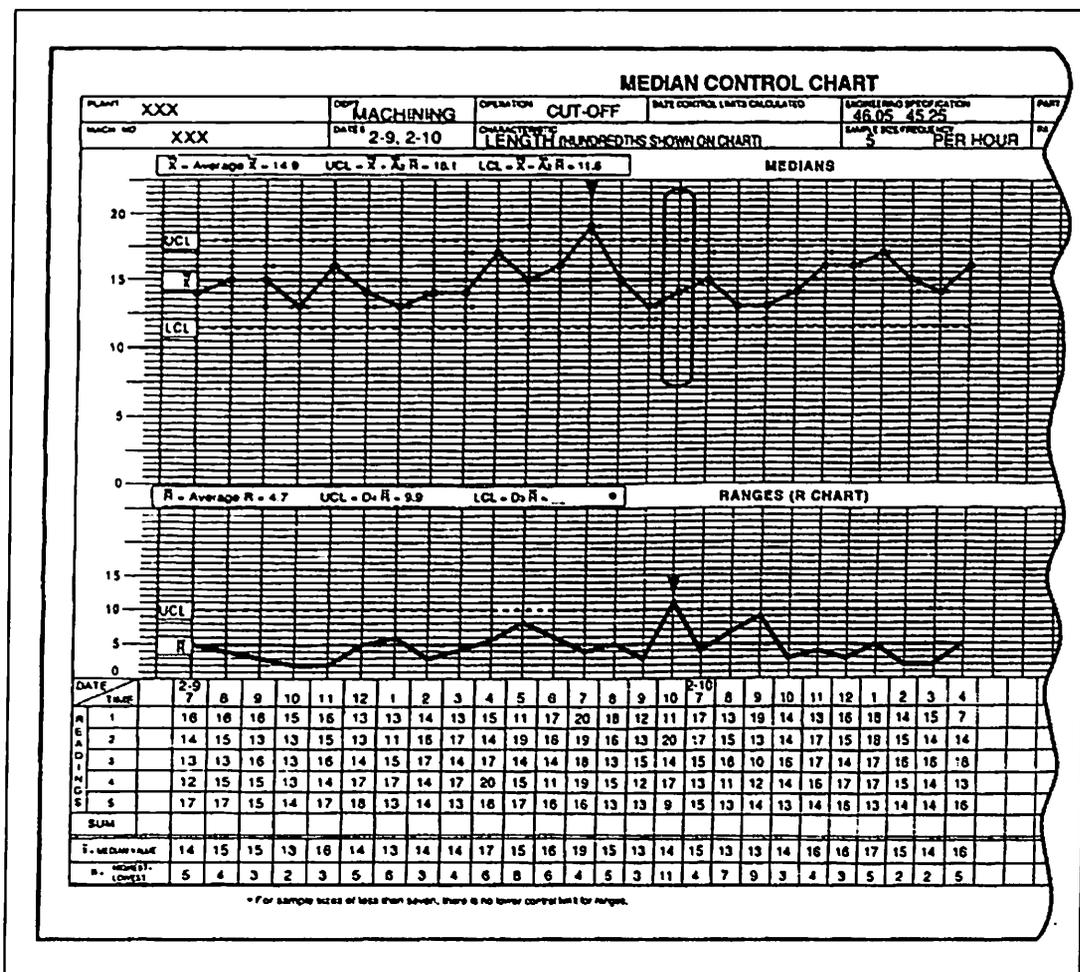


Figura 9.11. Gráfica de control de la mediana.

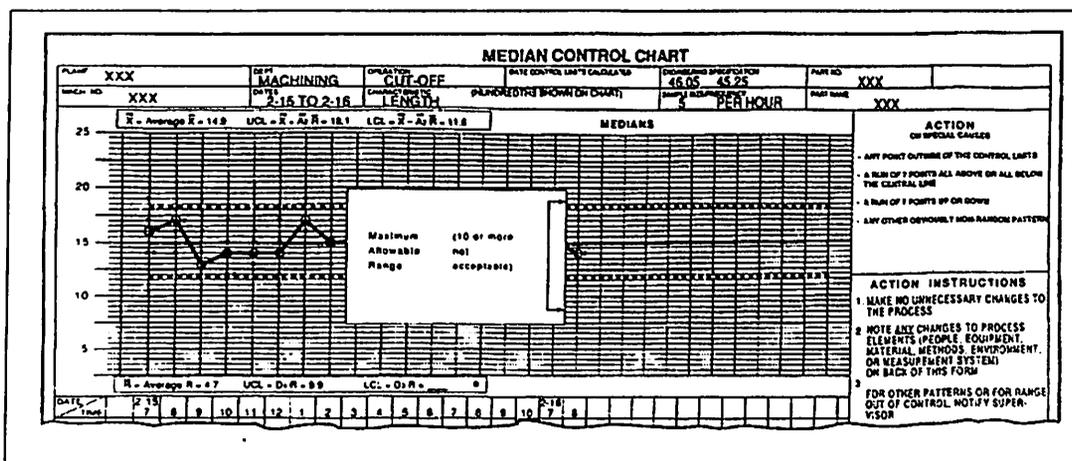


Figura 9.12. Gráfica de control de interpretación de la mediana.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D ₄	3.27	2.57	2.28	2.11	2.00	1.92	1.86	1.82	1.78
D ₃	*	*	*	*	*	.08	.14	.18	.22
A ₂	1.88	1.19	.80	.69	.55	.51	.43	.41	.36

Figura 9.13. Gráfica de control por variables.

Análisis del Gráfico:

Se puede apreciar una leve tendencia hacia abajo \bar{X} , lo que indica prevenir, revisando la línea de proceso, checando la:

- a) Operación (procedimiento)
- b) La calibración del equipo.
- c) Checar lote.

Se sale en las medianas y en los rangos un punto en el límite superior, que reafirma que se debe ir a la línea de proceso.

Uso del Gráfico \bar{X} - R

Son útiles pues dado que no se necesita calcular \bar{X} , los gráficos los pueden hacer los operarios de línea para un n impar.

Son útiles para monitorear un proceso controlado y estable.

Muestran fielmente la dispersión en el proceso y de la salida del mismo.

Se puede usar para mostrar la salida de varios procesos, o unidades, o etapas diferentes y comparar.

Gráfico de Control Media - Desviación Estándar (\bar{X} - S)

Análisis Estadístico del Gráfico (\bar{X} - S)

Cuando se manejan valores de $n > 10$ ó 12 , el método de la amplitud, pierde eficiencia estadística, en estos casos conviene remplazar R por la desviación de la muestra (S) de cada subgrupo.

Si σ^2 es la varianza desconocida de una distribución de σ^2 será la varianza muestral S^2

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (\text{Ec. 9.52})$$

La desviación estándar muestral (S) no es un estimador insesgado de la desviación estándar de la población (σ).

Si la distribución subyacente es normal entonces S realmente estima $C_4\sigma$ donde $C_4 =$ constante que depende del tamaño muestral n

La desviación estándar de S es $\sigma\sqrt{1-C_4^2}$ se considera

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S = \sqrt{S^2}$$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

pero:

$$E[S] \neq \sigma$$

$$E[S] = C_4 \sigma \quad (\text{Ec. 9.53})$$

Donde:

$$C_4 = \left[\frac{2}{(n-1)} \right]^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \quad (\text{Ec. 9.54})$$

$$\text{Var}[S] = C_5^2 \sigma^2$$

$$C_5 = (1 - C_4^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= \sigma^2 (1 - C_4^2) \\ E[S] &= C_4 \sigma \end{aligned} \quad (\text{Ec. 9.55})$$

$$\sqrt{\text{Var}(S)} = C_5 \sigma \quad (\text{Ec. 9.56})$$

$$\text{L.S.C.} = C_4 \sigma_0 + 3C_5 \sigma_0$$

$$\text{L.S.C.} = (C_4 + 3 C_5) \sigma_0$$

$$(C_4 + 3 C_5) = B_6$$

$$\text{L.S.C.} = B_6 \sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.57})$$

$$\text{L.I.C.} = C_4 \sigma_0 - 3C_5 \sigma_0$$

$$\text{L.I.C.} = (C_4 - 3C_5)\sigma_0$$

$$B_5 = (C_4 - 3 C_5)$$

$$\text{L.I.C.} = B_5 \sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.58})$$

Esto es considerando el caso en el que se tiene un valor estándar para σ_0 ya que:

$$E(S) = C_4\sigma_0$$

que será la línea central del gráfico.

De otro modo:

$$\text{L.S.C.} = C_4\sigma_0 + 3 \sigma_0 \sqrt{1 - C_4^2} \quad (\text{Ec. 9.59})$$

$$\text{L.I.C.} = C_4\sigma_0 - 3 \sigma_0 \sqrt{1 - C_4^2} \quad (\text{Ec. 9.60})$$

$$\text{y } B_5 = C_4 - 3 \sqrt{1 - C_4^2}$$

$$B_6 = C_4 + 3 \sqrt{1 - C_4^2}$$

Donde los valores B_5 y B_6 aparecen en el Cuadro A.6.

Retrospectivamente:

Si se tienen m subgrupos, cada subgrupo de tamaño n :

Entonces se tendrán (S_1, S_2, \dots, S_m) ya que:

$$S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i$$

se estima σ_x con $\frac{S}{C_4}$; porque $E[S] = C_4\sigma$

y también σ con $S; C_5 \frac{S}{C_4}$

$$\text{L.S.C.} = S + 3 \frac{C_5}{C_4} \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.61})$$

$$\text{L.S.C.} = \left(1 + 3 \frac{C_5}{C_4}\right) S \quad B_4 = \left(1 + 3 \frac{C_5}{C_4}\right)$$

$$\text{L.S.C.} = B_4 S \quad (\text{Ec. 9.62})$$

$$B_4 = \frac{B_5}{C_4} \quad (\text{Ec. 9.63})$$

La estadística $\frac{\bar{S}}{C_4}$, es un estimador insesgado de σ , dado que E

$[S] = C_4 \sigma$ de ahí las expresiones de los límites siguientes:

$$\text{L.S.C.} = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} \quad (\text{Ec. 9.64})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} \quad (\text{Ec. 9.65})$$

entonces las constantes son:

$$B_3 = 1 - \frac{3}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} \quad (\text{Ec. 9.66})$$

$$B_4 = 1 + \frac{3}{C_4} \sqrt{1 - C_4^2} \quad (\text{Ec. 9.67})$$

$$\text{L.S.C.} = B_4 \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.68})$$

$$\text{L.I.C.} = B_3 \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.69})$$

Línea central = \bar{S}

Está claro que: $B_4 \frac{B_6}{C_4}$; $B_3 \frac{B_5}{C_4}$

Cuando $\frac{S}{C_4}$ se aplica para estimar σ , entonces los límites para el gráfico de control \bar{X} son:

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + \frac{3S}{C_4 \sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 9.70})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - \frac{3S}{C_4 \sqrt{n}} \quad (\text{Ec. 9.71})$$

donde: $A_3 = \frac{3}{C_4 \sqrt{n}}$

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + A_3 \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.72})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - A_3 \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.73})$$

Línea central = \bar{X}

Las constantes B_3 , B_4 y A_3 que son elementos de estimación para un tamaño muestral definido para construir los gráficos de \bar{X} y S , están en tablas que se encuentran en el anexo, y dependen de n .

Si la desviación estándar considera en su denominador n , en lugar de $(n - 1)$, entonces las constantes C_4 , B_3 , B_4 y A_3 , se verán modificadas, y serán ahora C_2 , B_1 , B_2 y A_1 , (Bowker y Lieberman, 1972). Las elaboran en Estados Unidos (Montgomery, 1991. Statistical Quality Control).

Realmente, la disyuntiva de usar n o $(n-1)$ no importa sustantivamente, dado que el objetivo del gráfico de control es el de determinar si el proceso está bajo control estadístico, así como la estimación del parámetro σ .

- S (rms) es un estimador sesgado de σ .
- S es un estimador de σ sesgado.
- S^2 (rms) es un estimador sesgado de σ^2 .
- S^2 es un estimador insesgado de σ^2 .

Pero la S^2 de la raíz cuadrada de la media es un estimador sesgado.

Donde la S de la raíz cuadrada de la media, es en sí el estimador máximo de bondad de σ .

Sin embargo, para el mayor número de aplicaciones industriales, se prefiere usar S que S de la raíz cuadrada de la media.

Recuerde que:

$$S \text{ (rms)} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}; S = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Por lo que usar S , es más recomendable.

Concretando:

Para σ desconocida:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{\left(\sum n_i - k\right)} \quad (\text{Ec. 9.74})$$

$$S = \sum_{i=1}^k \frac{S_i}{k} \quad \text{para } k \text{ en subgrupos de igual tamaño. (Ec. 9.75)}$$

$$\sigma = \frac{\mu_s}{C_4} \quad (\text{Ec. 9.76})$$

σ = desviación estándar de los individuales.

μ_s = promedio de la desviación estándar.

C_4 = constante del factor de proporcionalidad.

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{C_5} \quad (\text{Ec. 9.77})$$

σ_s = desviación estándar de la desviación estándar donde C_4 y C_5 son función de n , que aparecen en el Cuadro A.4.

Límite de control = $\mu_s \pm 3 \sigma_s$

Por la (Ec. 9.77); Límite de control = $\bar{S} \pm 3 C_5 \hat{\sigma}$ (Ec. 9.78)

Por la (Ec. 9.76); Límite de control = $\bar{S} \pm 3 C_5 \left(\frac{\bar{S}}{C_4}\right)$ (Ec. 9.79)

L.S.C. = $B_4 \bar{S}$ (Ec. 9.80)

L.I.C. = $B_3 \bar{S}$ (Ec. 9.81)

donde: $B_4 = 1 + 3 \frac{C_5}{C_4}$ } Aparecen en el Cuadro A.4.
 $B_3 = 1 - 3 \frac{C_5}{C_4}$ }

Los constantes C_4 y C_5 para S , así como C_2 y C_3 para $S(\text{rms})$, son funciones entre sí, dado que cada $S(\text{rms})$ es $\frac{\sqrt{n-1}}{n}$ veces la correspondiente S entonces $S(\text{rms}) = \frac{\sqrt{n-1}}{n} \bar{S}$ y $C_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{nC_4}$, donde el valor C_4 :

$$C_4 = [2(n-1)]^{1/2} \frac{\left\{ \left[\frac{(n-2)}{2} \right] \div 2 \right\}!}{\left[\frac{n-3}{2} \right]!}$$

$$C_2 = \left[\frac{2}{n} \right]^{1/2} \left[\frac{\left(\frac{n-2}{2} \right)!}{\left(\frac{n-3}{2} \right)!} \right] = C_4 \left[\frac{n-1}{n} \right]^{1/2}$$

$$C_3 = \left[\binom{n-1}{n} - C_2^2 \right]^{1/2}$$

$$C_4 = C_2 \left[\frac{n}{(n-1)} \right]^{1/2} \quad (\text{Ec. 9.82})$$

$$C_5 = \left\{ C_3 \left[\frac{n}{(n-1)} \right] \right\}^{1/2}$$

$$C_5 = [1 - C_4^2]^{1/2} \quad (\text{Ec. 9.83})$$

Aportación de Mosteller, 1946; Duncan, 1974 y Montgomery, 1991. Statistical Quality Control).

Conversión para un Gráfico de Desviación Estándar

Para un gráfico S con R, los parámetros son:

$$\text{Línea Central} = \left[\frac{C_4}{d_2} \right] R \quad (\text{Ec. 9.84})$$

$$\text{L.S.C.} = \left[\frac{B_6}{d_2} \right] R \quad (\text{Ec. 9.85})$$

$$\text{L.I.C.} = \left[\frac{B_5}{d_2} \right] R \quad (\text{Ec. 9.86})$$

donde los valores $\frac{C_4}{d_2}$, $\frac{B_6}{d_2}$ y $\frac{B_5}{d_2}$ están tabulándose en el Cuadro A.1.

Para el Caso de σ Conocida :

Cuando σ es conocida o un valor estándar σ_0 se usa; los límites de control se obtienen directamente de los principios básicos de límites de control:

$$\sigma = \frac{\mu_s}{C_4}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{C_5}$$

$$\text{Límites de control} = \mu_s \pm 3\sigma_s \quad (\text{Ec. 9.87})$$

$$\text{Para las Ecs (9.76, y 9.77)} \Rightarrow \text{L.C.} = C_4\sigma_0 \pm 3C_5\sigma_0$$

$$\text{L.C.} = (C_4 \pm 3C_5) \sigma_0$$

$$\text{Línea central} = C_4 \sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.88})$$

$$\text{L.S.C.} = B_6 \sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.89})$$

$$\text{L.I.C.} = B_5 \sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.90})$$

donde:

$$\left. \begin{aligned} B_6 &= (C_4 + 3C_5) \\ B_5 &= (C_4 - 3C_5) \end{aligned} \right\} \text{Valores en el Cuadro A.4.}$$

Los Límites de Control para σ Desconocida:

a). Con el gráfico de rango:

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + A_2 \bar{R} \quad (9.91)$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - A_2 \bar{R} \quad (9.92)$$

donde A_2 aparece en Cuadro A.1.

b). Con el gráfico de la desviación estándar:

$$\text{Límites de control} = \bar{X} \pm 3\sigma_x$$

$$\text{Por la Ec. } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow = \bar{X} \pm 3 \sqrt{\frac{\sigma}{n}}$$

$$\text{Por la Ec. } \sigma = \frac{\mu_s}{C_4} \Rightarrow = \bar{X} \pm \left[\frac{3}{\sqrt{n}} \right] \left[\frac{\bar{S}}{C_4} \right]$$

$$= \bar{X} \pm A_3 \bar{S}$$

$$\text{L.S.C. } x = \bar{X} + A_3 \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.93})$$

$$\text{L.I.C. } x = \bar{X} - A_3 \bar{S} \quad (\text{Ec. 9.94})$$

De igual manera para σ conocida, o valores estándar \bar{X}_0, σ_0 , los límites son:

$$\text{L.S.C.} = X_0 + A\sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.95})$$

$$\text{L.I.C.} = X_0 - A\sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.96})$$

donde A aparece en el Cuadro A.1.

Ilustración y Construcción del Gráfico $(\bar{X} - S)$

Es importante verificar la variabilidad del proceso sea estable; de otro modo la parte de \bar{X} , no será confiable dado que los límites de control de \bar{X} dependen del valor medio de S.

Existen dos casos generales concretamente a los tamaños de los subgrupos:

- Tamaños iguales.
- Tamaños diferentes.

Se considera el primer caso porque es más simple

Es necesario estimar la desviación estándar de cada muestra:

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2}{n-1}}$$

La línea central del gráfico S se calcula:

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^K S_i}{K}$$

Las expresiones para los límites son:

$$\text{L.S.C.} = B_4 S$$

$$\text{L.I.C.} = B_3 S$$

donde B_3 y B_4 dependen de n ($n = 5$) aparecen en el Cuadro A.1.

Si la gráfica de la desviación estándar está en control, se procede a elaborar el gráfico de medias.

La línea central será:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^K \bar{X}_i}{K}$$

Se calculan los límites de control:

$$\text{L.S.C. } x = \bar{X} + A_3 S$$

$$\text{L.I.C. } x = \bar{X} - A_3 S$$

Los valores de A_3 aparecen en el Cuadro A.1 dado un valor de n .

Ejemplo de ilustración del gráfico de $\bar{X}-S$ tomado de un proceso de manufactura:

En el proceso de pintura de una planta ensambladora de coches, se monitorea la operación "proceso básico", en la característica llamada "grosor de la película de pintura".

La especificación es 1 milímetro, el tamaño de muestra es 10 y la frecuencia de muestreo es 2 veces al día.

- Los datos son registrados por computadora.
- Si los datos son numerosos, se registran en hojas por separado con sólo cada subgrupo su \bar{X} y S apareciendo en el gráfico.
- Calculamos S de cada subgrupo (Figuras 9.14 y 9.15).

DATA COLLECTION														PRIMER THICKNESS (MILS)			
SAMPLE-SIZE - 10 CONSECUTIVE PIECES TWICE PER DAY																	
	1-11		1-12		1-13		1-14		1-15		1-16		1-17		1-18		1-19
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	1.30	1.01	1.22	1.08	.98	1.12	.92	1.04	1.08	1.20	1.25	1.24	1.13	1.08			
2	1.10	1.10	1.05	1.12	1.30	1.30	1.10	1.14	.92	1.13	.91	1.34	1.16	1.31			
3	1.20	1.15	.93	1.11	1.31	1.01	1.13	1.18	1.14	1.19	.96	1.40	1.12	1.12			
4	1.25	.97	1.08	1.28	1.12	1.20	1.02	1.12	1.20	1.16	1.04	1.26	1.22	1.18			
5	1.05	1.25	1.15	1.00	1.08	1.11	.93	1.00	1.02	1.03	.93	1.13	1.12	1.15			
6	.95	1.12	1.27	.95	1.10	.93	1.17	1.02	1.04	1.25	1.08	1.15	1.07	1.17			
7	1.10	1.10	.95	1.15	1.15	1.02	1.24	1.05	.94	1.20	1.29	1.08	1.04	.98			
8	1.16	.90	1.11	1.14	1.35	1.25	.98	1.34	1.05	1.24	1.42	1.02	1.28	1.05			
9	1.37	1.04	1.12	1.28	1.12	1.05	1.34	1.12	1.12	1.10	1.10	1.05	1.12	1.00			
10	.98	1.08	1.10	1.31	1.26	1.10	1.12	1.05	1.06	1.03	1.00	1.18	1.10	1.26			
\bar{X}	1.15	1.07	1.10	1.14	1.18	1.11	1.10	1.11	1.06	1.15	1.10	1.19	1.14	1.13			
S	.136	.098	.106	.120	.121	.115	.136	.101	.086	.079	.170	.125	.070	.107			
	1-20		1-21		1-22												
	1	2	1	2	1	2											
1	1.08	1.14	1.06	1.14	1.07	1.13											
2	1.26	1.02	1.12	1.22	1.05	.90											
3	1.13	1.14	.98	1.18	.97	1.12											
4	.94	.94	1.12	1.27	1.05	1.04											
5	1.30	1.30	1.20	1.17	1.16	1.40											
6	1.15	1.08	1.02	1.26	1.02	1.12											
7	1.07	.94	1.19	1.15	1.02	1.15											
8	1.02	1.12	1.03	1.07	1.14	1.01											
9	1.22	1.15	1.02	1.02	1.07	1.30											
10	1.18	1.36	1.08	1.36	1.00	1.14											
\bar{X}	1.14	1.12	1.08	1.18	1.06	1.13											
S	.111	.137	.074	.099	.059	.141											

Figura 9.14. Colección de datos.

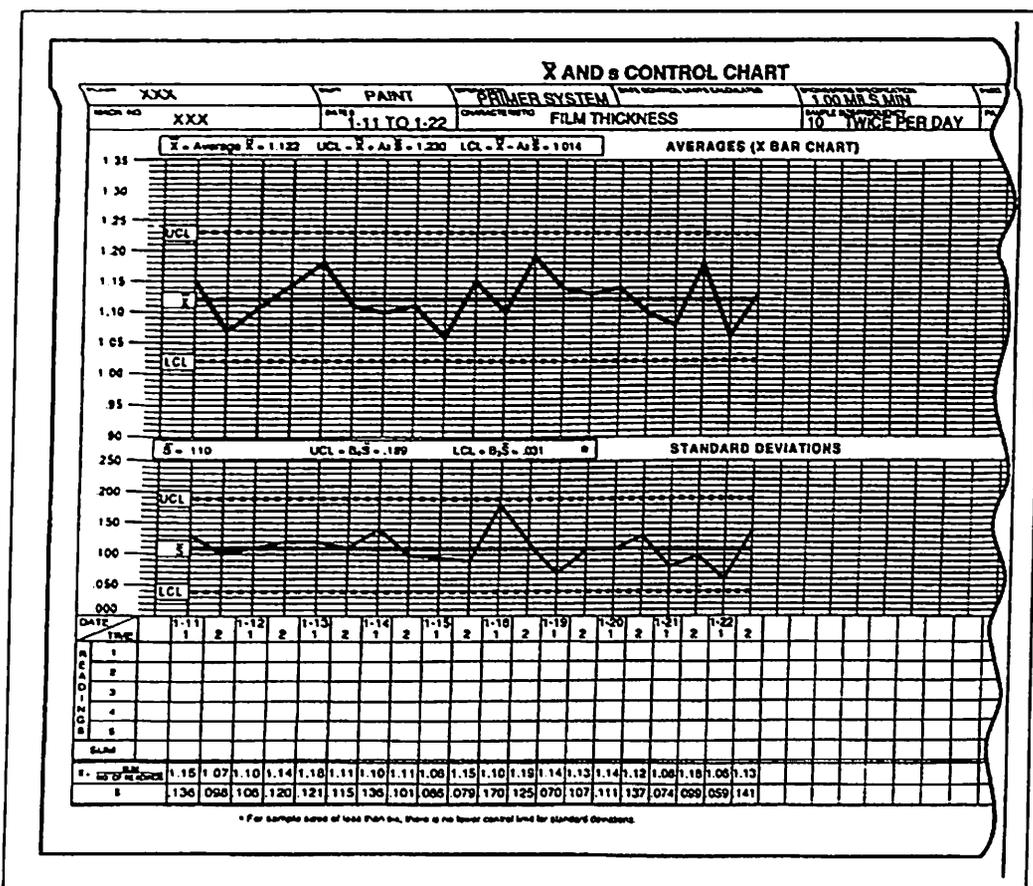


Figura 9.15. Gráfica de $\bar{X} - S$

Calcule los parámetros del gráfico:

$L.S.C.s = B_4 \bar{S}$

$L.I.C. s = B_3 \bar{S}$

$L.S.C. \bar{x} = \bar{X} + A_3 \bar{S}$

$L.I.C. \bar{x} = \bar{X} - A_3 \bar{S}$

Consulte los valores de B_4 , B_3 y A_3 en tablas que aparecen en el Cuadro A.1.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B ₄	3.27	2.57	2.27	2.09	1.97	1.88	1.82	1.76	1.72
B ₃	*	*	*	*	0.03	0.12	0.19	0.24	0.28
A ₃	2.66	1.95	1.63	1.43	1.29	1.29	1.03	1.03	0.98

Figura 9.16. Control de gráficas por variables.

Interpretación:

Se aprecia algo de tendencia en el gráfico \bar{X} sin embargo el proceso es saludable.

Se aprecia algo de adhesión a la línea central en el gráfico S, al inicio de la operación conviene checar la calibración de la pistola y la mezcla en su compresión del operario.

Usos del Gráfico \bar{X} - S

Cuando el tamaño de muestra debe ser grande ($n > 7$).

Gráficos de Control para Unidades Individuales

Cuando un proceso de producción es lento por sus mismas características, no pueden existir tamaños muestrales mayores de uno ($n = 1$); esto también ocurre cuando se usa tecnología de inspección y medición automatizada y se analiza cada unidad fabricada; o bien cuando mediciones repetidas difieren sólo debido a errores de laboratorio o de análisis, como en muchos procesos químicos. En estos casos, resulta útil el gráfico de control por unidades individuales. En el proceso de control se emplea la amplitud móvil de dos observaciones sucesivas para estimar la variabilidad del proceso. También es posible establecer un gráfico de control para la amplitud móvil de dos observaciones sucesivas.

- Al gráfico X de unidades individuales, también se le conoce como "el gráfico con límites de control de rango movable" o "gráficos de rango movable".
- Por razones económicas, de seguridad o de tiempo, a veces no se pueden formar subgrupos con $n > 1$.
- Si consideramos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ una vez que μ y σ_0 han sido determinadas se puede monitorear el proceso en línea.

$$L.S.C. = \mu_0 + 3\sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.97})$$

$$L.I.C. = \mu_0 - 3\sigma_0 \quad (\text{Ec. 9.98})$$

Dibuje X contra estos límites:

(X_1, X_2, \dots, X_m)

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad (\text{Ec. 9.99})$$

Estimado σ por:

- 1) La desviación estándar muestral (S).
- 2) El rango móvil.

$$S = \sqrt{S^2}$$

$$S^2 = \frac{1}{(m-1)} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{C_4}$$

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \quad (\text{Ec. 9.100})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - 3 \frac{\bar{S}}{C_4} \quad (\text{Ec. 9.101})$$

Ahora estimando σ con el rango móvil:

- El rango móvil es un rango de " ω " valores consecutivos donde la observación "más vieja" es removida y una nueva observación es agregada, ω es usualmente de valor 2.
- Rango móvil promedio:

$$\text{MR} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \text{MR}_i \quad (\text{Ec. 9.102})$$

Ahora estimamos σ con:

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{MR}}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.103})$$

d.

d_2 está basado en el tamaño $\omega = 2$, que será $d_2 = 1.128$

Usando este estimador:

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.104})$$

$$= \bar{X} + \frac{3}{d_2} \overline{MR} \quad (\text{Ec. 9.105})$$

$$E_2 = \frac{3}{d_2}$$

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + E_2 \overline{MR} \quad (\text{Ec. 9.106})$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - E_2 \overline{MR} \quad (\text{Ec. 9.107})$$

$$\text{L.S.C.} = \bar{X} + 2.66 \overline{MR} \quad \text{para } \omega = 2$$

$$\text{L.I.C.} = \bar{X} - 2.66 \overline{MR} \quad (\text{Ec. 9.108})$$

Recuerde que:

- El rango movible se define como la diferencia entre la mayor y menor de las observaciones en subgrupos consecutivos de n observaciones, con los subgrupos formados moviéndose a través de las observaciones en pasos por unidad, agregando la próxima i -ésima observación para cada nuevo subgrupo mientras descartando el $(i - n)$.

En un grupo de k observaciones habrá $k - n$ rangos movibles. El primero asociado con la n -ésima observación. Es como usar

$$MR_i = X_i - X_{i-1}, \quad i = 2, \dots, k$$

Esto produce:

$(k - 1)$ rangos movibles donde:

$$MR = \sum_{i=2}^k \frac{MR_i}{(k - 1)} \quad (\text{Ec. 9.109})$$

- Los límites de control para el gráfico X, cuando el rango movible es usado para estimar la desviación estándar son:

$$\begin{aligned} \text{Límites} &= \hat{\mu} \pm 3 \hat{\sigma} \quad (\text{Ec. 9.110}) \\ &= \bar{X} \pm 3 \frac{\overline{MR}}{d_2} \quad \text{que ya mostramos.} \end{aligned}$$

Notas Importantes de Comparación:

- El estimador basado en MR (Rango movible), se enfoca a considerar variaciones cortas.
- El estimador basado en S, no depende de el orden de los datos.
- El estimador MR - Rango depende de el orden y tiempo de los datos.
- Si se usa $\frac{\bar{S}}{C_4}$, se tenderá a límites de control amplios.
- Usando $\frac{\overline{MR}}{d_2}$, se tendrá a límites angostos.
- Como en el gráfico X, no se usa el subgrupo, es necesario ser más cuidadoso acerca del supuesto de normalidad.

Elaboración del Gráfico de Control X

Existe algún metodo para elaborar este gráfico:

1) Método del subagrupamiento de los datos.

- Se realiza un subagrupamiento racional del mismo modo que se realiza en X - R.
- Se busca \bar{X} .
- Se calcula $\bar{\bar{X}}$.
- Se busca \bar{R} .
- Se calculan los límites:

$$\bar{X} \pm 3 \frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{\bar{X}} \pm E_2 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.111})$$

donde E_2 se obtiene de la tabla a continuación:

n	E_2
2	2.660
3	1.772
4	1.457
5	1.290
6	1.184
7	1.109
8	1.054
9	1.010
10	0.975

2) Metodo que usa MR:

- Si por ejemplo los datos son:

18.3, 19.1, 18.5, 18.8, 19.3; el recorrido para $n = 2$ está dado por:

$$MR = 19.1 - 18.3 = 0.8$$

$$= 19.1 - 18.5 = 0.6$$

$$= 18.8 - 18.5 = 0.3$$

- Con el gráfico X - MR, los límites de control del gráfico X se calculan normalmente con la fórmula:

$$\bar{X} \pm 3 \frac{MR}{d_2} = \bar{X} \pm A_2 \overline{MR} \sqrt{n} \quad (\text{Ec. 9.112})$$

$$= \bar{X} \pm E_2 \overline{MR}$$

$$= \bar{X} \pm 2.66 \overline{MR}$$

- Donde d_2 , y A_2 son valores para $n = 2$ que se obtienen en el Cuadro A.1

- Para $E_2 = \frac{3}{d_2}$ y el valor de E_2 dado $n = 2$ es 2.66. (Ver tabla en hoja anterior).

- Los límites de control del gráfico MR, se calculan para $n = 2$

$$L.S.C. = D_4 \overline{MR} \quad (\text{Ec. 9.113})$$

L.I.C. = (no aplicable).

- Los valores de MR, se grafican directamente debajo de los puntos medios entre puntos X contiguos.

- El método para calcular los límites de control a partir de MR se utilizan en las siguientes situaciones:

- a) Cuando es importante un subagrupamiento racional.
- b) Cuando los datos sólo se pueden obtener a intervalos de tiempo muy largos.
- c) Cuando el proceso muestra una fluctuación grande.
- 3) Método que utiliza los errores de muestreo y de media como referencia:
- Se utiliza para controlar mantenerlas a granel especialmente cuando los errores de muestreo y de medida son un problema. Por ejemplo, cuando tenemos muestras compuestas (muestras medias) (norma UNE), al reunir n - extracciones elementales de material en un proceso que consiste en una reacción de síntesis orgánica por lotes o procesos de carbón, conque, fertilizantes, etc., y la muestra se analiza una vez y se obtiene una medida X, los límites serán:

$$\bar{X} \pm 3 \hat{\sigma}_s$$

$\hat{\sigma}_s$ = La precisión del muestreo de la muestra compuesta.

Si la variación entre extracciones elementales es $\hat{\sigma}_i$ y las n extracciones elementales se muestran aleatoriamente y si las precisiones de la reducción y el análisis de la muestra son σ_R y σ_M , respectivamente, un único análisis será:

$$\hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{n} + \sigma_R^2 + \sigma_M^2}$$

Este método se aplica cuando el error de muestreo es grande y el proceso es bien controlado.

Ahora ilustraremos la construcción de un gráfico para unidades individuales y rango movable (\bar{X} - MR) con un ejemplo de un proceso real en una planta de productos químicos.

Departamento: Elaboración de Salmuera.

Característica: Concentración del ácido - %

Especificación: 9%

Tamaño de muestra: Una

Frecuencia: Cada dos horas.

Precauciones en el uso del gráfico:

- Estos gráficos no son tan sensitivos como \bar{X} - R
- La interpretación debe ser cuidadoso si la distribución del proceso es no simétrica.
- Este gráfico no aísla el concepto pieza a pieza del proceso.
- Los valores \bar{X} y $\hat{\sigma}$ pueden tener una variabilidad sustancial (aunque el proceso sea estable), esto hasta que el número de subgrupos es 100 o más.

Construcción del Gráfico de Control \bar{X}

1. Las lecturas individuales (X), se registran de izquierda a derecha en el gráfico.

2. Se calcula el MR entre los individuales (diferencia entre cada par sucesivo de lecturas) o (diferencia entre la primera y la segunda lectura; la segunda y la tercera, etc.).

Habia entonces un MRi de menos que el número de las lecturas individuales.

3. Seleccionar una escala para el gráfico, que podrá ser:
- La mayor especificación o tolerancia mas un margen razonable.
 - 1 1/2 veces la diferencia entre la mayor y menor de las lecturas.
4. Calcule los límites de control.
- \bar{X}
 - \bar{R}

$$\text{L.S.C.}_{MR} = D_4 \bar{R}$$

$$\text{L.I.C.}_{MR} = D_3 \bar{R}$$

$$\text{L.S.C.}_X = \bar{X} + E_2 \bar{R}$$

$$\text{L.I.C.}_X = \bar{X} - E_2 \bar{R}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D ₄	3.27	2.57	2.28	2.11	2.00	1.92	1.86	1.82	1.78
D ₃	*	*	*	*	*	0.08	0.14	0.18	0.22
E ₂	2.66	1.77	1.46	1.29	1.18	1.11	1.05	1.01	0.98

Figura 9.17. Valor de tabla para las constantes D₄, D₃ y E₂

El gráfico es el siguiente (Figura 9.18)

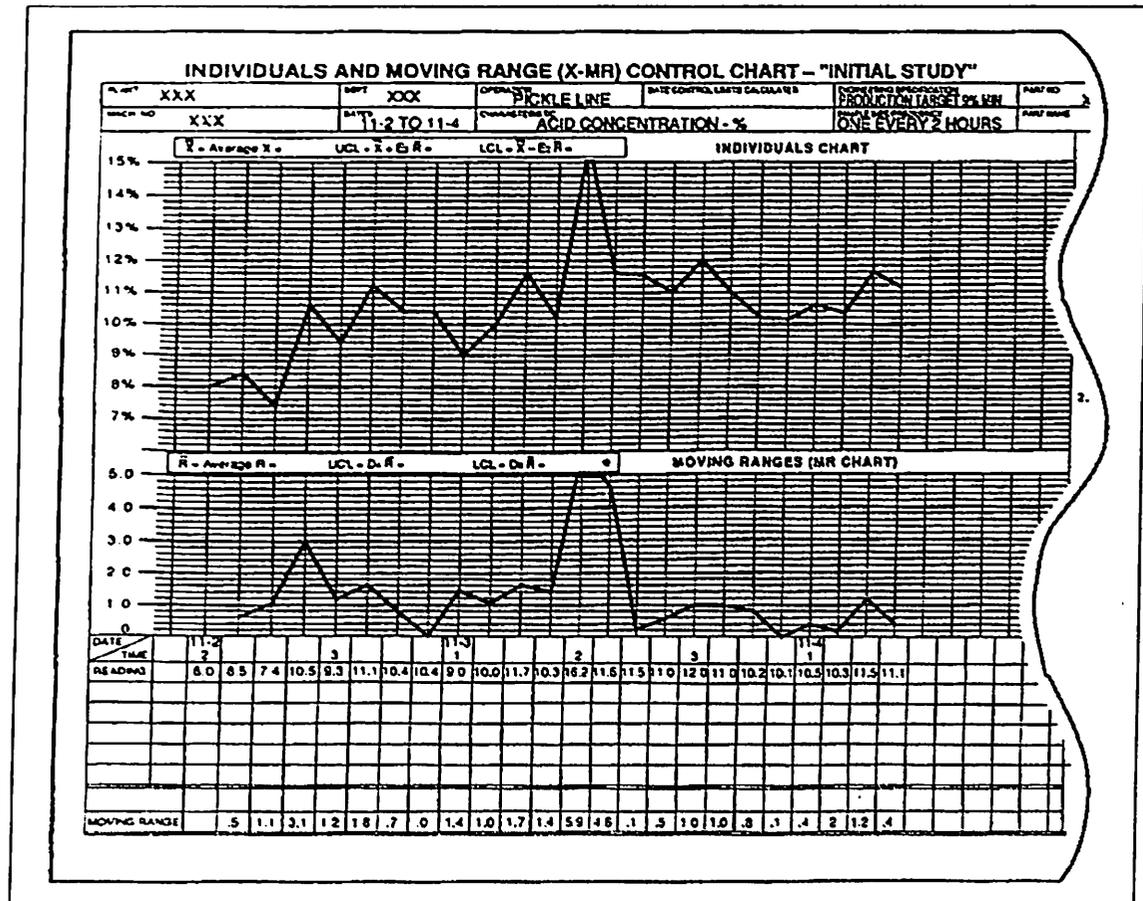


Figura 9.18. Gráfico individual y mid rangos

Se puede apreciar en las dos gráficas que el proceso es inestable dado que se observan puntos sobre el límite superior, así también se aparecía adhesión al límite inferior del gráfico de rango por lo que es conveniente un análisis a fondo del proceso.

Interpretación del gráfico:

- En ambos gráficos se aprecian puntos fuera de los límites, lo que indica que hay irregularidades en el proceso de salmuera.
- Existen MRi sucesivos correlacionados dado que al menos un punto existe en común.
- Es necesario ir al área de trabajo y checar:
 - a) Procedimiento de operario.
 - b) Colaboración de alimentadores.
 - c) Calibración de instrumentos de medición.
 - d) Checar si se cumplen específicamente de factores de influencia en el proceso.
 - e) Homogeneidad adecuada de la solución.
 - f) Especificación del input.

Ventajas del Gráfico X

Por ser un solo dato, es fácil elaborarlo.

- El gráfico muestra como varía un proceso a lo largo del tiempo.
- Cuando en el proceso hay fluctuación grande o periodicidad o cuando en la media del proceso surge un cambio grande y repentino, el gráfico los registra de inmediato.
- La potencia de la prueba de hipótesis como gráfico de control, también puede ser mejor.

Desventajas del Uso del Gráfico X

- Es fácil cometer el error tipo II. (La potencia de la prueba es mala).
- El concepto de subagrupamiento, no está claro y hay confusión en las variaciones dentro del subgrupo.
- Como no se toma la media, el patrón de puntos está distorsionado cuando la distribución de N no es una distribución normal.

Gráficos Mid Rangos (M)

Una media más de tendencia central en la distribución de variables, en cuanto a sus características de calidad, es la Mid rangos.

Como la media, es usada en conjunto con el gráfico R y ofrece una alternativa para el promedio (\bar{X}), en el gráfico de control donde se desea un cálculo fácil de hacer.

El promedio difiere del gráfico \bar{X} solo en el cálculo del Mid rango.

$$M = (X_{\max} + X_{\min}) / 2$$

Como el promedio de dos valores extremos en el subgrupo. Los mismos valores se usan para obtener el rango. La media, la mediana de los mid rangos puede ser usada como línea central.

Análisis Estadístico del Gráfico M

Partiendo del principio básico.

$$\hat{\mu} \pm 3 \hat{\sigma}_M$$

Es usado para obtener las expresiones para los límites para mid rangos.

Para el caso de σ desconocida, estimamos μ y σ_M :

$$\sigma = \frac{\sigma_M}{\ell_3} \quad (\text{Ec. 9.114})$$

donde:

ℓ_3 = es una función del tamaño del subgrupo (n) y se obtiene en el Cuadro A.4.

A.- Con el criterio de rango de mediana:

El gráfico mid rango (M), es usado más comúnmente con el gráfico rango y el de medianas.

$$\text{Límite de control} = \hat{\mu} \pm 3 \hat{\sigma}_M \quad (\text{Ec. 9.115})$$

$$= \tilde{M}_o \quad \bar{M} \pm 3 \ell_3 \hat{\sigma} \quad (\text{Ec. 9.116})$$

Por la expresión $\sigma \frac{\mu_R}{d_4}$

$$\text{Límites de control} = \tilde{M}_o \quad \bar{M} \pm 3 \ell_3 \left[\frac{\bar{R}}{d_4} \right] \quad (\text{Ec. 9.117})$$

$$= \tilde{M}_o \quad \bar{M} \pm A_4 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.118})$$

$$\text{L.S.C.} = \tilde{M}_o \quad \bar{M} + A_4 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.119})$$

$$\text{L.I.C.} = \tilde{M}_o \quad \bar{M} - A_4 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.120})$$

donde $A_4 = \ell_3 \frac{3}{d_4}$; es función de n y se obtiene en el Cuadro A.6.

B.- Con el criterio de rango del promedio

$$\text{Límites de control} = \hat{\mu} \pm 3 \hat{\sigma}_M$$

$$= \tilde{M}_o \quad \bar{M} \pm 3 \ell_3 \hat{\sigma}$$

$$= \tilde{M}_o \quad \bar{M} \pm 3 \ell_3 \left[\frac{\bar{R}}{d_4} \right] \quad (\text{Ec. 9.121})$$

$$= \tilde{M}_o \quad \bar{M} \pm A_6 \bar{R} \quad (\text{Ec. 9.122})$$

donde $A_6 = \ell_3 \frac{3}{d_2}$; aparece en el Cuadro A.6, donde dependen del valor de n .

Tópicos Complementarios Inherentes a los Gráficos de Control

El Precontrol

Esta es una técnica para detectar cambios o trastornos en el proceso que promuevan que se inestabilice.

Difiere del control estadístico de procesos en que este se enfoca el gráfico de control a detectar cambios en los parámetros del proceso que son estadísticamente significativos, mientras que el precontrol se utiliza la distribución normal para determinar cambios en la media o en su desviación estándar.

El Procedimiento

- a) Suponer que la característica de calidad se distribuye en forma normal y que los límites naturales son $\mu \pm 3\sigma$, coinciden con los límites de especificación.

Que la media del proceso se encuentra a la mitad de las especificaciones de manera que se produce el 0.27 por ciento de rechazo.

- b) Se establecen dos límites de precontrol LSPC y LIPC, cada uno a 1/4 del límite de control de especificación y hacia adentro. Aproximadamente el 86 por ciento del rendimiento cae dentro de estos límites de precontrol y aproximadamente un 7 por ciento cae

fuera de ellas. Esto es que un artículo de 14 caerá fuera de la línea de precontrol.

- c) La probabilidad de encontrar dos productos defectuosos será $1/200$ esto implicará pensar que el proceso ha cambiado hacia un estado fuera de control.
- d) Cuando un primer artículo defectuoso cae fuera de un LPC (límite de precontrol) y el otro del otro límite, implica que la variabilidad del proceso aumentó.

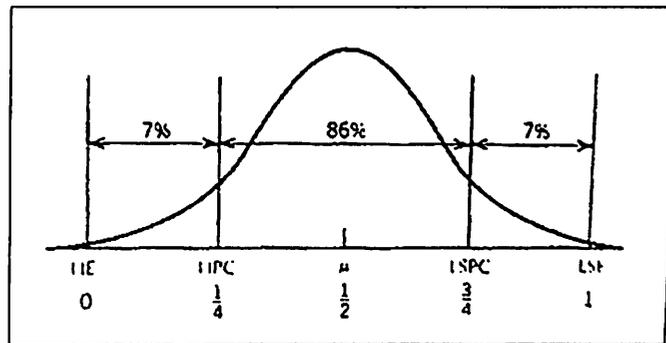


Figura 9.20. Ubicación de las líneas de precontrol

Reglas

- Si el primer artículo cae fuera de especificaciones se ajusta y se empieza de nuevo.
- Si un artículo está dentro de especificaciones pero fuera de una línea PC (precontrol) se verifica el siguiente artículo.
- Si el segundo artículo cae fuera de la línea PC se ajusta el proceso.

- Si el segundo artículo cae dentro de PC se continua. Se ajusta sólo cuando hay dos artículos sucesivos fuera.
- Si un artículo cae fuera de PC y el próximo cae fuera de la otra línea de PC, la variabilidad del proceso está fuera de control.
- Cuando cinco consecutivos caen dentro de PC se emplea la calibración de frecuencia.
- Cuando se emplea la calibración de frecuencia no se ajusta el proceso.
- Después de ajustar el proceso, cinco artículos sucesivos deben caer dentro de PC.
- Si hay más de 25 muestras del proceso sin tener que ajustar, se reduce la frecuencia de calibración, de otro modo, se aumenta la frecuencia de calibración. Un promedio de 25 muestras antes de ajuste, refleja una frecuencia de muestreo satisfactoria.

Desventajas del Precontrol

- No se pueden usar todas las reglas de percepción y procedimientos porque no hay trazo de datos.
- No hay historial diagnóstico.

- Las muestras pequeñas reducen la capacidad del procedimiento para detecciones.
- El PC no proporciona información útil para poner el proceso bajo control o reducir la variación.
- Sólo es aplicable para procesos muy controlados con tendencia cercana a cero defectos

Análisis del Proceso Usando Gráficos de Control

La Organización de los Subgrupos

De la organización depende la efectividad del gráfico. La recolección de datos es posterior a la selección de la característica de calidad. Para la organización debe considerarse la variación a controlar y luego el agrupamiento, esto es:

- a) La operación se debe realizar de acuerdo a procedimiento uniformemente.
- b) Los datos deben agruparse en función del tiempo.

Debe considerar los siguientes puntos para el agrupamiento:

- a) Probar distintos tamaños de subgrupo y las combinaciones de datos.
- b) Cambios en la organización, producción, cambios en los factores que dan la variación dentro del subgrupo.

Variación dentro del Subgrupo y Variación entre Subgrupos

La variación dentro del subgrupo es la que aparece representada por el valor \bar{R} en un gráfico R.

La variación entre subgrupos es lo que aparece y se encuentra representada por la distribución de las \bar{X}_i en un gráfico \bar{X} .

Si la varianza de un subgrupo es σ_w^2 y la varianza entre subgrupos es σ_b^2 ,

entonces:

$$\sigma_x^2 = \sigma_b^2 + \frac{\sigma_w^2}{n} \quad (\text{Ec. 9.123})$$

σ_w se estima a partir de R:

$$\hat{\sigma}_w = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (\text{Ec. 9.124})$$

La distribución de los puntos \bar{X} se ve afectada no sólo por la variación entre subgrupos, sino también dentro de ellos.

La variación de un estado perfectamente controlado es:

$$\sigma_b^2 = 0 \text{ y } \sigma_w^2 = \text{constante}$$

Donde:

$$\hat{\sigma}_b = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 - \frac{\hat{\sigma}_w^2}{n}} \quad (\text{Ec. 9.125})$$

σ_x^2 se calcula con el histograma de \bar{X}

a partir de:

$$\hat{\sigma}_b = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_w^2} \quad (\text{Ec. 9.126})$$

donde σ_x^2 se calcula con el histograma de X.

Estratificación

Cuando se elabora el mismo producto en diferentes máquinas o por varios operarios, es conveniente organizar los datos por estratos.

El siguiente es un gráfico de control que muestra los elementos A y B (máquinas) (Figuras 9.21 y 9.22), que muestra con claridad, donde ubicar causas de variación para su análisis.

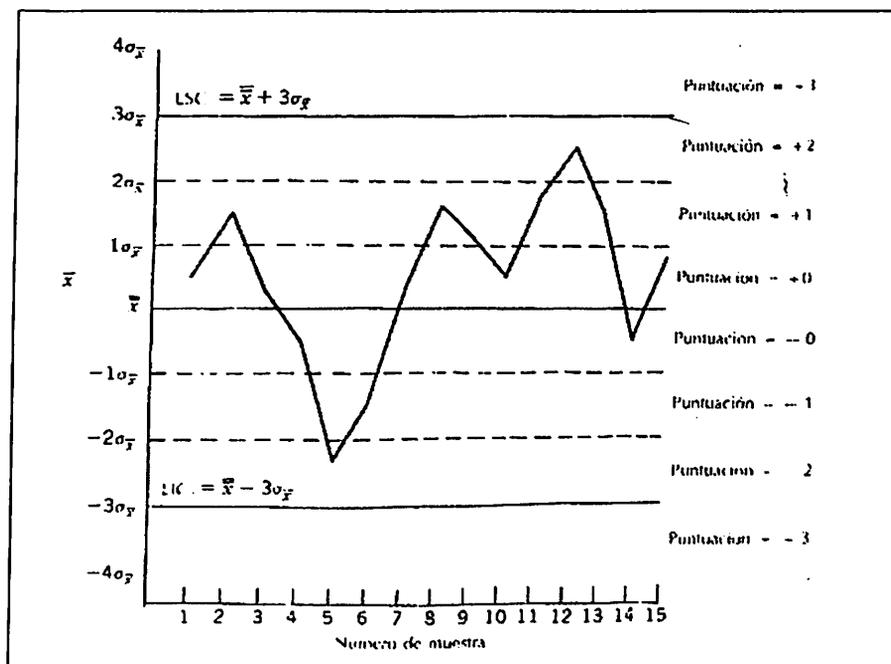


Figura 9.21. Diagrama de suma de corridas.

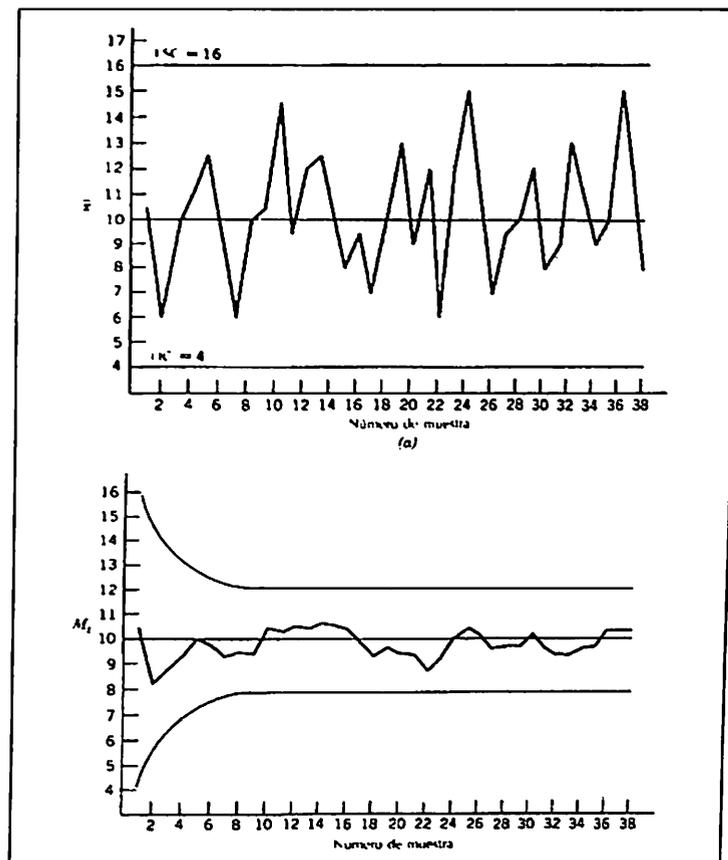


Figura 9.22. Diagramas de control de media y de media móvil.

Prueba de la Diferencia entre Gráficos de Control Estratificados

Si las gráficas anteriores \bar{X} -R estratificadas satisfacen:

- a) Ambas gráficas están en control
- b) El tamaño del subgrupo es el mismo
- c) Los valores de \bar{R}_A y \bar{R}_B son casi iguales
- d) Los números de subgrupos k_A y k_B son suficientemente grandes
($k_A > 10$, $k_B > 10$),

entonces podemos someter a prueba la diferencia entre los promedios:

$$|\bar{X}_A - \bar{X}_B| \geq A_2 \bar{R} \sqrt{\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}}$$

donde: $\bar{R} = (k_A \bar{R}_A + k_B \bar{R}_B) / (k_A + k_B)$

Para ver si hay una diferencia en la variación entre los estratos después de la estratificación, usamos:

Para $\bar{R}_A > \bar{R}_B$ $\frac{\bar{R}_A}{\bar{R}} \geq 1.2; \frac{\bar{R}}{\bar{R}_B} \geq 1.2$ (Ec. 9.127a)

Para $\bar{R}_B > \bar{R}_A$ $\frac{\bar{R}_B}{\bar{R}} \geq 1.2; \frac{\bar{R}}{\bar{R}_A} \geq 1.2$ (Ec. 9.127b)

Cuando la diferencia es obvia, por inspección esto ya no será necesario.

La Interpretación Estadística de los Gráficos de Control

Si un proceso cambia, también cambia la distribución de cualquier característica. Esto se manifiesta como un cambio en la media del proceso y de la variación (dentro del subgrupo).

Consideremos un proceso como una secuencia de puntos.

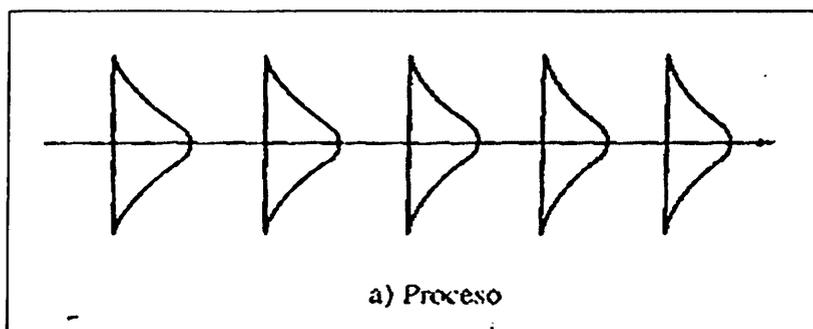


Figura 9.23. Grafico de un proceso normal

El proceso está controlado cuando no cambia la media ni la variación (Figura 9.29). Esto es:

- Los puntos están repartidos aleatoriamente entre los límites de control.
- No hay puntos fuera de ellos.
- En el gráfico \bar{X} , la mayoría de puntos caen cerca de la línea central y otros menos cerca de los límites.
- En el gráfico R, caen más puntos debajo de la línea central (asimetría).

La figura a continuación ilustra a un proceso aceptable:

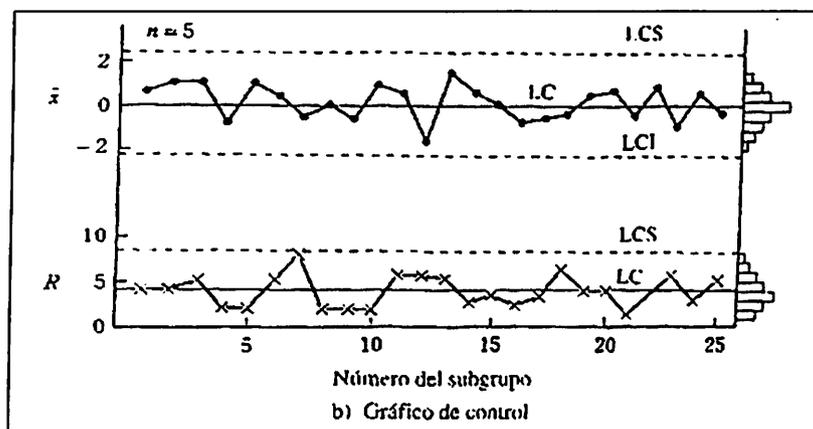


Figura 9.24. Estado totalmente controlado.

Cuando la media del proceso cambia mucho y repentinamente:
use gráfico R- \bar{X} (Figura 9.25).

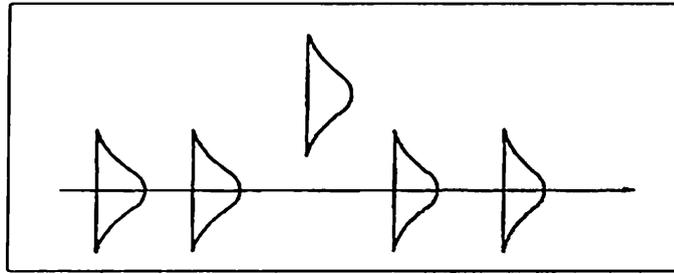


Figura 9.25. Fluctuación grande y repentina del promedio de un proceso.

Gráfico \bar{X} : algunos puntos caen fuera de límites.

Cuando la variación dentro de subgrupos cambia mucho y repentinamente (Fig. 9.26).

Use gráfico \bar{X} -R:

gráfico R, algunos puntos fuera

gráfico \bar{X} : algunos puntos fuera

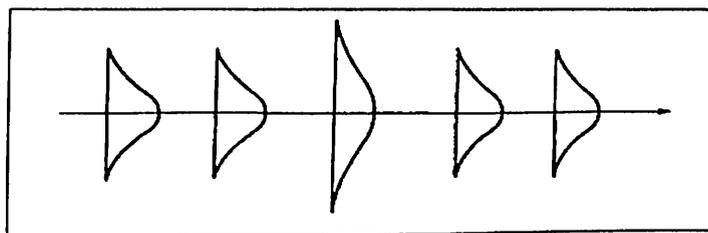


Figura 9.26. Fluctuación grande y repentina de la dispersión

Cuando el promedio del proceso aumenta gradualmente:

gráfico R, ningún cambio

gráfico \bar{X} : en la zona B_1 aumente el número total de puntos \bar{X}_i por encima de la línea central y se observan rachas, pero no hay puntos fuera; en la zona B_2 algunos puntos caen fuera de límites (Figura 9.27.).

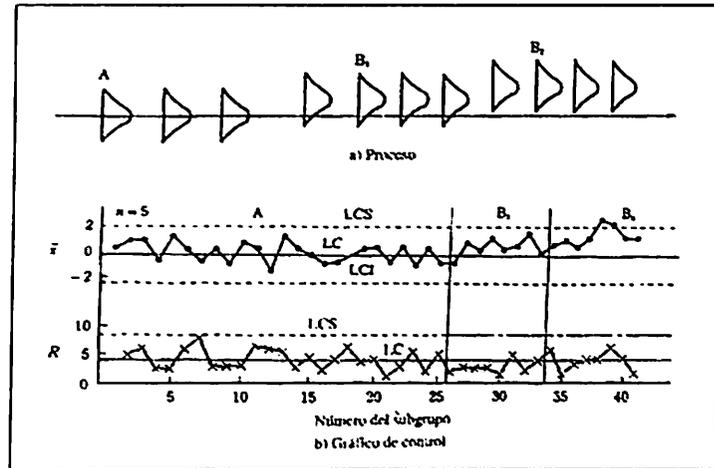


Figura 9.27. Fluctuación grande y repentina de la dispersión.

Cuando el promedio del proceso cambia según una tendencia definida (Figura 9.28)

gráfico R: ningún cambio

gráfico \bar{X} : algunos puntos caen fuera del límite

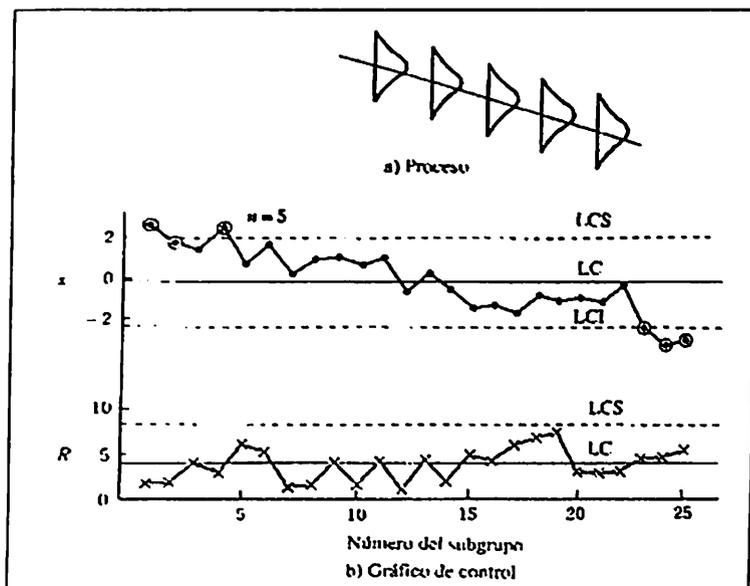


Figura 9.28. Cambio sostenido del promedio de un proceso.

Cuando el promedio del proceso cambia aleatoriamente:

a) Si el cambio es ligero se observa:

gráfico R: ningún cambio

gráfico \bar{X} : aumenta el número de puntos de límites; el desplazamiento vertical de puntos es cada vez más pronunciado.

b) Si el cambio es grande (Figura 9.29):

gráfico R: ningún cambio

gráfico \bar{X} : el desplazamiento vertical de puntos es cada vez más pronunciado; aumenta el número de puntos fuera de límites.

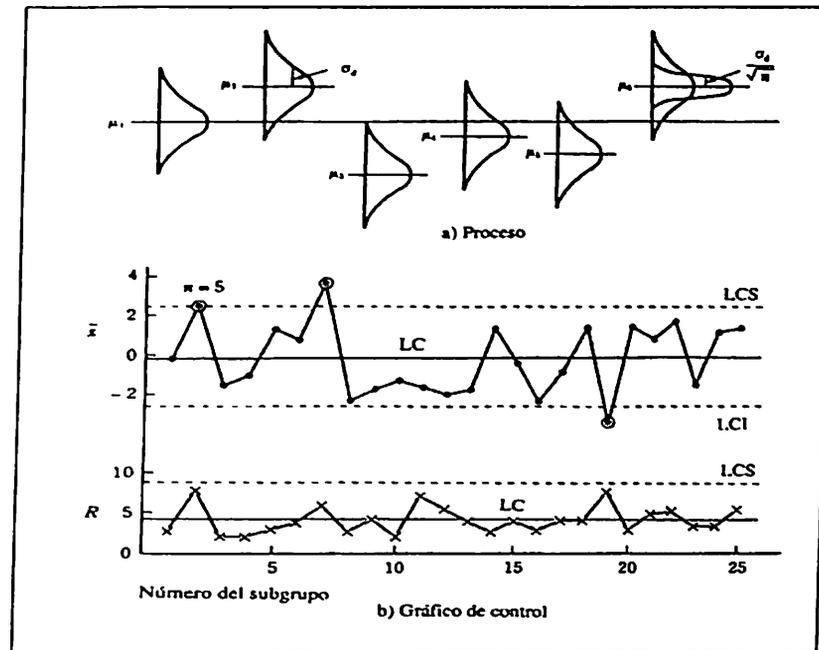


Figura 9.29. Cambio grande y aleatorio del promedio de un proceso.

Sea la desviación dentro de subgrupos σ_d . Sea la desviación entre subgrupos σ_e .

σ_e es un indicador de σ_x .

El gráfico R mostrara la variación dentro del subgrupo y si σ_d no cambia, el estado del proceso será controlado.

Estimamos σ_d con $\frac{\bar{R}}{d_2}$

El propósito del gráfico R es controlar la variación dentro de subgrupos.

La variación de $\bar{X}, \sigma_{\bar{X}}^2$ depende de $\frac{\sigma_d^2}{n}$ y σ_e^2 , en su combinación,

esto es:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_e^2 + \frac{\sigma_d^2}{n} \quad (\text{Ec. 9.128})$$

Donde para un proceso controlador Si el promedio es constante

$$\sigma_e = 0 \text{ y:}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_d^2}{n} \quad (\text{Ec. 9.129})$$

Cuando cambia la variación dentro de los subgrupos:

a) Aumento en la variación:

Gráfico R: Hay tendencia hacia arriba y algunos puntos caen fuera de límites.

Gráficos \bar{X} : la distribución es aleatoria, pero el desplazamiento vertical es cada vez más pronunciado.

Algunos puntos salen de límites.

b) Disminuye la variación:

Gráfico R: Los puntos muestran descenso general y aumento su número bajo la línea central.

Gráfico X : La distribución es aleatoria, pero su desplazamiento se hace menos pronunciado.

Los puntos se distribuyen igual arriba y abajo de la línea central, acercándose más a ella. (Figura 9.30)

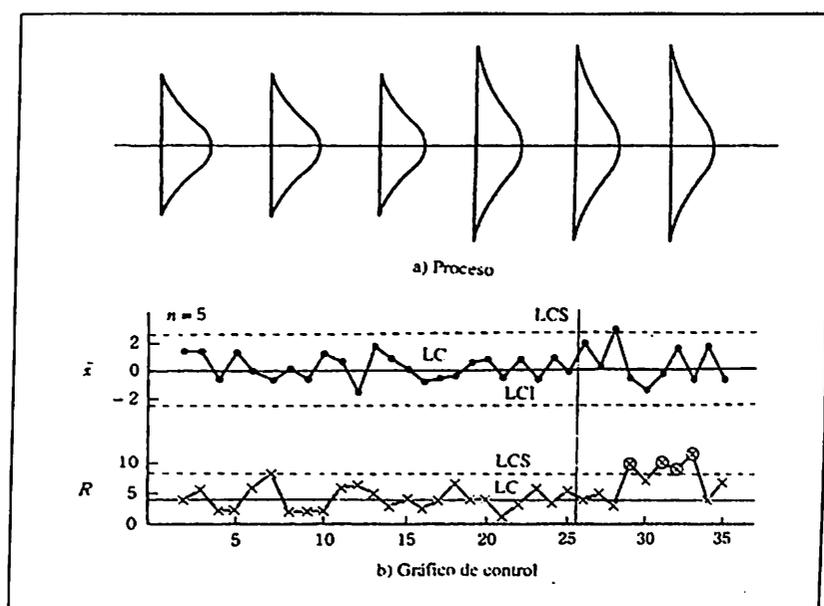


Figura 9.30. Aumento de la dispersión de un proceso.

Cuando se juntan dos grupos de datos con medias muy diferentes:

Gráfico R: Los puntos se aglutinan alrededor de la línea central.

Gráfico \bar{X} : no sufre alteración.

Significa que:

Se han incluido datos procedentes de distintas fuentes.

Que los subgrupos contienen datos procedentes de procesos con medias distintas.

Se sugiere investigar estratificado de formas diferentes dentro de subgrupos (Figura 9.31).

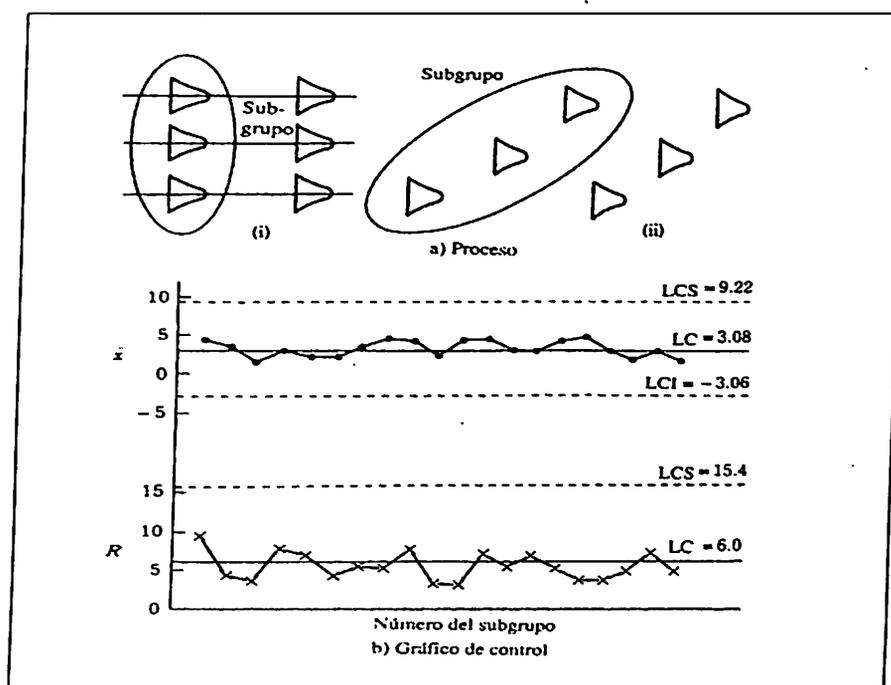


Figura 9.31. Combinación de datos procedentes de poblaciones con tres distribuciones muy diferentes.

Métodos para Contrastar las Diferencias entre Promedios a Partir de Gráficos de Control

- Preparar gráficos de control estratificados y separados para los conjuntos de datos A y B y calcular \bar{R}_A y \bar{R}_B .

- Calcule F_0 :

$$F_0 = \frac{\left[\frac{\bar{R}_A}{C_A} \right]^2}{\left[\frac{\bar{R}_B}{C_B} \right]^2} \quad (\text{Ec. 9.130})$$

El mayor de \bar{R}_A/C_A y \bar{R}_B/C_B se utiliza como numerador.

C_A y C_B son coeficientes que dependen de n_A y n_B .

Si $F_0 \geq F(\Phi_A, \Phi_B, 0.01)$

Hay diferencia en la variación dentro de los subgrupos σ_d de A y B a un nivel de significación de un 2 por ciento.

Prueba de Hipótesis de la diferencia en los promedios μ_A y μ_B .

- Elabore un gráfico $\bar{X} - R$ estratificado (número de subgrupos igual).

$$- \bar{X}_A - \bar{X}_B \geq A_2 \bar{R} \cdot \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B}$$

- Si hay desigualdad, es seguro que hay diferencias entre promedios.

Puede usar también:

$$R = \frac{K_A \bar{R}_A + K_B \bar{R}_B}{K_A + K_B}, \text{ si } K_A = K_B, \bar{R} = \frac{\bar{R}_A + \bar{R}_B}{2}$$

Si se cumple:

- a) Los gráficos de control deben mostrar estado controlado.
- b) $n_A = n_B$
- c) K_A y K_B deben ser suficientemente grandes ($K \geq 0$)
- d) No hay diferencia entre \bar{R}_A y \bar{R}_B
- e) La distribución deberá ser normal.

Por que el error tipo I y la probabilidad de gráficos correctamente un punto bajo control no son iguales a sus niveles señalados para los gráficos de control individuales.

Es decir que sus gráficos individuales son diferentes al conjuntado.

X. APLICACIONES DIVERSAS DE CAMPO DE LOS GRAFICOS DE CONTROL POR VARIABLES

Proceso de Teñido de Tela (\bar{X} - R)

- En el proceso de teñido de lana se vio la conveniencia de controlar la acidez del colorante (pH). Para tal efecto, se hicieron pruebas cada 20 minutos y se registraron los resultados en grupos de tamaño 6. Las mediciones son las siguientes en unidades de concentración:

Cuadro 10.1. Datos proceso de teñido de tela.

Día	T	a	b	c	d	e	f
2/8	1	4.22	4.20	4.20	4.08	4.15	4.15
2/8	2	4.25	4.22	4.10	4.15	4.10	4.15
2/8	3	4.20	4.22	4.01	4.17	4.18	4.30
2/8	4	4.20	4.25	4.18	4.05	4.17	4.10
3/8	5	4.15	4.20	4.03	4.15	4.31	4.25
3/8	6	4.18	4.17	4.17	4.30	4.15	4.10
3/8	7	4.22	4.24	4.23	4.07	4.19	4.25
3/8	8	4.00	4.15	4.18	4.10	4.30	4.20
4/8	9	4.10	4.15	4.30	4.36	4.15	4.10
4/8	10	4.20	4.25	4.20	4.30	4.15	4.10
4/8	11	4.35	4.20	4.25	4.12	4.30	4.10

1. paso- llene el formato de graficar
2. paso- calcule los rangos R de cada subgrupo.

$$R1 = 0.14 \quad \bar{X}_1 = 4.167$$

$$R2 = 0.15 \quad \bar{X}_2 = 4.162$$

	Grupo
R3 = 0.29	X ₃ = 4.180
R4 = 0.20	X ₄ = 4.158
R5 = 0.28	X ₅ = 4.182
R6 = 0.20	X ₆ = 4.178
R7 = 0.18	X ₇ = 4.200
R8 = 0.30	X ₈ = 4.155
R9 = 0.26	X ₉ = 4.193
R10 = 0.20	X ₁₀ = 4.200
R11 = 0.25	X ₁₁ = 4.220

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n=1} \bar{X}_i}{n}$$

Gráfico de Rangos

3er paso.

$$LIC_R = D_3 R = (0) (0.2227) = 0$$

$$LSC_R = D_4 R = (2) (0.2227) = 0.44$$

$$LC = R = 0.2227$$

4º paso

Ahora para medias:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = 4.18$$

para $n = 6$ $A^2 = 0.48$

$$LIC_x = \bar{X} + A_2 R = 4.18 + (0.48) (0.2227) = 4.07$$

$$LSC_x = \bar{X} - A_2 R = 4.18 - (0.48) (0.2227) = 4.29$$

5º paso. Construir los gráficos. (Figura 10.1)

6º paso. Interpretación:

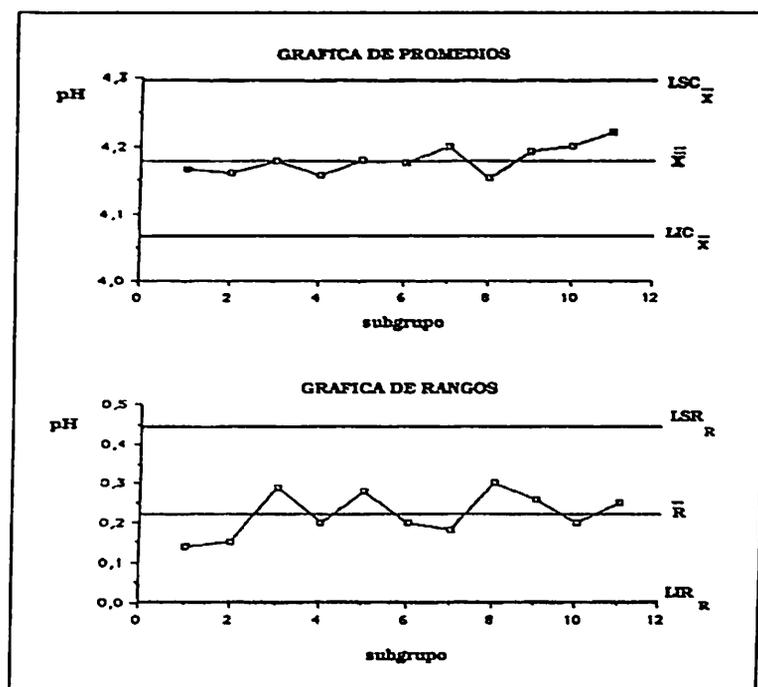


Figura 10.1. Gráfica de promedios y rangos.

Interpretación:

El gráfico de rangos está en control y el gráfico de promedios muestra una ligera tendencia aunque los puntos están en control (dentro de límites), es conveniente, examinar el proceso y analizarlo para ubicar posibles causas de variación.

Gráfico \bar{X} - R

Un proceso de manufactura de componentes mecánicos, se ha venido monitoreando mediante gráficos \bar{X} - R. El proceso ha mostrado estabilidad en el tiempo; ahora se ha decidido cambiar hacia gráficos de medianos - rangos.

El cuadro de datos obtenidos de 24 muestras de tamaño $n = 3$ de la característica de calidad "peso de pieza" en miligramos (mg).

Cuadro 10.2. Datos de la característica de calidad de proceso mecánico.

Lecturas			\bar{X}	R
6.0	5.8	6.1	6.0	6.3
5.2	6.4	6.9	6.4	1.7
5.5	5.8	5.2	5.5	0.6
5.0	5.7	6.5	5.7	1.5
6.7	6.5	5.5	6.5	1.2
5.8	5.2	5.0	5.2	0.8
5.6	5.1	5.2	5.2	0.5
6.0	5.8	6.0	6.0	0.2
5.5	4.9	5.7	5.5	0.8
4.3	6.4	6.3	6.3	2.1
6.2	6.9	5.0	6.2	1.9
6.7	7.1	6.2	6.7	0.9
6.1	6.9	7.4	6.9	1.3
6.2	5.2	6.8	6.2	1.6
4.9	6.6	6.6	6.6	1.7
7.0	6.4	6.1	6.4	0.9
5.4	6.5	6.7	6.5	1.3
6.6	7.0	6.8	6.8	0.4
4.7	6.2	7.1	6.2	2.4
6.7	5.4	6.7	6.7	1.3
6.8	6.5	5.2	6.5	1.6
5.9	6.4	6.0	6.0	0.5
6.7	6.3	4.6	6.3	2.3
7.4	6.8	6.3	6.8	1.1

Calculando la línea central de rangos:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{K} = \frac{28.9}{24} = 1.2$$

Los límites de control para rangos.

$$LSC_R = D_4 R = (2.574) (1.2) = 3.1$$

$$LIC_R = D_3 R = (0) (1.2) = 0$$

Ahora graficamos rangos (Figura 10.2):

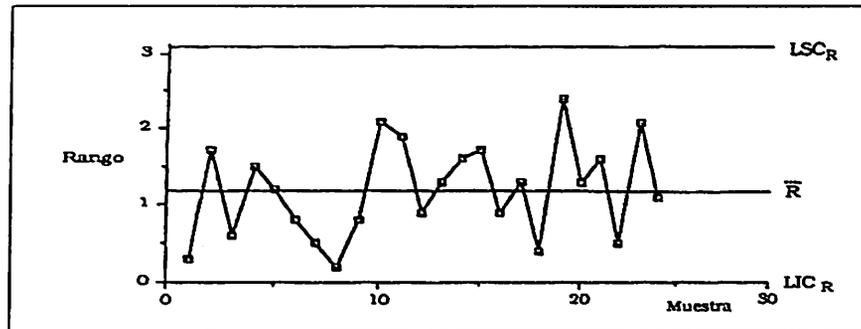


Figura 10.2. Gráfica de rangos

La línea central de medianas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{K} = \frac{149.1}{24} = 6.2$$

Los límites de control para medianas:

$$LIC_x = \bar{X} + A_6 \bar{R} = 6.2 + (1.187) (1.2) = 7.6$$

$$LSC_x = \bar{X} - A_6 \bar{R} = 6.2 - (1.187) (1.2) = 4.8$$

La gráfica para medianas es (Figura 10.3):

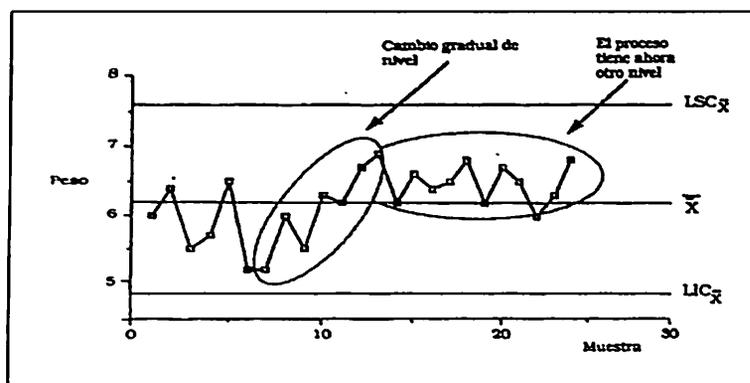


Figura 10.3. Gráfica de medianas.

Interpretación:

- Puede notarse que los rangos son estables.
- Nótese inestabilidad en el proceso debido a la presencia de casos asignables de variación que aparecen a partir de la séptima muestra, donde inicia un cambio gradual de nivel, por lo que hay que identificar dichas casos de inmediato.

Gráfico X – S

En una planta ensambladora de camionetas que son exportadas a Sudamérica; en el área de pintura, se pretende monitorear la característica "espesor de pintura en placa", la cual es crítica para el proceso.

Se obtuvieron los siguientes datos en milésimas de pulgada:

Cuadro 10.3. Datos de la característica espesor de pintura en placa.

	\bar{X}										S
12.03	2.26	2.13	1.94	2.30	2.15	2.07	2.02	2.22	2.18	2.14	.111
22.14	2.02	2.14	1.94	2.30	2.08	1.92	2.12	2.15	2.36	2.12	.137
32.30	2.10	2.20	2.25	2.05	1.95	2.10	2.16	2.37	1.98	2.15	.136
42.10	2.10	2.15	1.97	2.25	2.12	2.10	1.90	2.04	2.08	2.07	.098
52.06	2.12	1.98	2.12	2.20	2.02	2.19	2.03	2.02	2.09	2.08	.074
62.14	2.22	2.18	2.27	2.17	2.26	2.15	2.07	2.02	2.36	2.18	.099
72.07	2.05	1.97	2.05	2.16	2.02	2.02	2.14	2.07	2.00	2.06	.059
82.08	2.31	2.12	2.18	2.15	2.17	1.98	2.05	2.00	2.26	2.13	.107
92.13	1.90	2.12	2.04	2.40	2.12	2.15	2.01	2.30	2.14	2.13	.141
102.13	2.16	2.12	2.22	2.12	2.07	2.04	2.28	2.12	2.10	2.14	.070
112.24	2.34	2.40	2.26	2.13	2.15	2.08	2.02	2.05	2.18	2.19	.125
122.25	1.91	1.96	2.04	1.93	2.08	2.29	2.42	2.10	2.00	2.10	.170
132.03	2.10	2.24	2.20	2.25	2.03	2.06	2.19	2.13	2.20	2.14	.084
142.08	1.92	2.14	2.20	2.02	2.04	1.94	2.05	2.12	2.06	2.06	.086
152.04	2.14	2.18	2.12	2.00	2.02	2.05	2.34	2.12	2.05	2.11	.101
162.92	2.10	2.13	2.02	1.93	2.17	2.24	1.98	2.34	2.12	2.10	.136
172.12	2.30	2.01	2.20	2.11	1.93	2.02	2.25	2.05	2.10	2.11	.115
181.98	2.30	2.31	2.12	2.08	2.10	2.15	2.35	2.12	2.26	2.18	.121
192.08	2.12	2.11	2.22	2.00	1.95	2.15	2.14	2.28	2.31	2.14	.113
202.22	2.05	1.93	2.08	2.15	2.27	1.95	2.11	2.12	2.10	2.10	.106

Calculado S:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^k S_i}{K} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{K} = \frac{2.19}{20}$$

$$S = 0.11$$

Para los límites de control de gráfico S:

$$LIC_s = \beta_3 S = (0.284) (0.11) = 0.031$$

$$LSC_s = \beta_4 S = (1.716) (0.11) = 0.189$$

La gráfica (Figura 10.4) de la desviación estándar es:

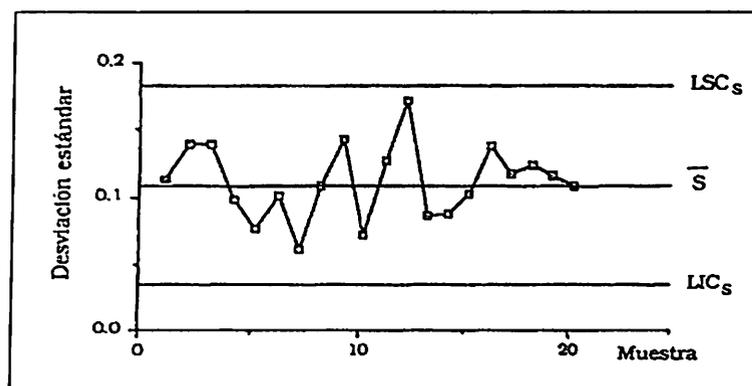


Figura 10.4. Gráfica de desviaciones estándar.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{K} = \frac{42.43}{20} = 2.12$$

Los límites de control del gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} LIC_{\bar{x}} &= \bar{X} - A_3 \bar{S} = 2.12 - (0.975) (0.11) \\ &= \underline{2.013} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{x}} &= \bar{X} + A_3 \bar{S} = 2.12 + (0.975) (0.11) \\ &= \underline{2.227} \end{aligned}$$

El gráfico que da (Figura 10.5).

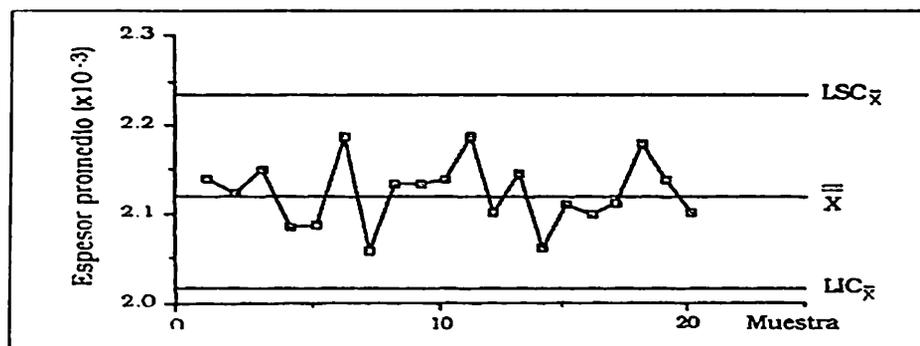


Figura 10.5. Gráfica de promedios.

Interpretación:

- En el gráfico de S se aprecia al proceso en control.
- En el gráfico de \bar{X} exhibe un patrón aleatorio de puntos, de modo que puede afirmarse que el proceso está bajo control, sin embargo el proceso puede ser mejorable.

Gráfico (\bar{X} - S)

Una industria textil tiene 15 máquinas que producen un tipo de fibra destinada a la misma aplicación. En esta es fundamental que la resistencia a la tracción sea más uniforme posible. Los resultados de varias pruebas efectuadas se resumen en el Cuadro 10.4.

$$S = 0.3405$$

3. Se calcula media del tamaño de los grupos:

$$n = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{K}$$

$$n = \frac{1039}{15}$$

$$n = 69.26$$

4. Se calcula la constante A_1 :

$$A_1 = \frac{3}{n}$$

$$A_1 = \frac{3}{69.26} = 0.3605$$

5. Calcular la constante β_4

$$\beta_4 = 1 + \frac{3}{2n}$$

$$\beta_4 = 1 + \frac{3}{2(69.26)}$$

$$\beta_4 = 1.2549$$

6. Calcular la constante β_3

$$\beta_3 = 1 + \frac{3}{n^2}$$

$$= 1 - 0.2549$$

$$\beta_3 = 0.7451$$

7. Calcular límites de control para \bar{X} :

$$\begin{aligned} \text{LSC}_x &= \bar{X} + A_1 \bar{S} \\ &= 2.1778 + (0.3605) (0.3405) \end{aligned}$$

$$\text{LSC}_x = 2.3006$$

$$\begin{aligned} \text{LIC}_x &= \bar{X} - A_1 \bar{S} \\ &= 2.1778 - (0.3605) (0.3405) \end{aligned}$$

$$\text{LIC}_x = 2.0555$$

8. Se calcula límites de control \bar{S} :

$$\text{LSC}_s = \beta_4 \bar{S}$$

$$\text{LSC}_s = 1.2549 (0.3405) =$$

$$\text{LSC}_s = 0.4273$$

$$\text{LIC}_s = \beta_3 \bar{S}$$

$$\text{LIC}_s = (0.7451) (0.3405)$$

$$\text{LIC}_s = 0.2537 \quad (\text{Figura 10.6})$$

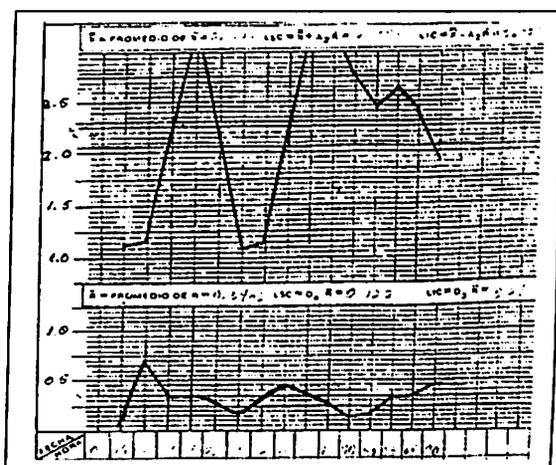


Figura 10.6. Límites de control.

Interpretación del Gráfico:

Sólo las máquinas 1, 2, 3, 5 y 8 están en control.

Gráfico de Lecturas Individuales y Rangos (X - R)

En un proceso químico el parámetro presión es una característica vital para el buen desempeño del proceso.

No es útil pensar en tomar subgrupos de cinco mediciones, dado la sucesión rápida de ellos y por lo mismo, no serán significativos por lo que se optó por un monitoreo por variable en lectura individual:

- Se maneja en lugar de subgrupo el rango móvil (MR).

$$R_1 = X_2 - X_1$$

$$R_2 = X_3 - X_2$$

.

.

.

$$R_{k-1} = |X_k - X_{k-1}|$$

- Ventaja es que en el gráfico podemos incluir las especificaciones del producto y compararlo contra datos.
- Los datos de lectura en el proceso son:

$$P [=] \text{ g/cm}^2$$

Cuadro 10.5. Datos del proceso químico.

P = g/cm ²	Rango	P	Rango
6.83	4.86	3.43	0.27
5.63	1.20	3.43	0.00
3.57	2.06	3.90	0.47
4.76	1.19	3.30	0.60
5.84	1.08	2.20	1.10
7.20	1.36	3.40	1.20
6.16	1.04	2.30	1.10
1.89	4.27	2.17	0.13
2.17	0.28	3.08	0.91
3.16	0.99	3.43	0.35
3.16	0.00	3.36	0.07
3.16	0.00		
3.16	0.00		

Se calcula la media de rangos:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{k-1}}{k-1} = \frac{24.53}{24} = 1.02$$

Especificación inferior es 3.1 para $n = 2$ $D_3 = 0$; $D_4 = 3.267$.

Los límites de control son:

$$LIC_R = D_3 \bar{R} = (0) (1.02) = 0$$

$$LSC_R = D_4 \bar{R} = (3.267) (1.02) = 3.34$$

El gráfico (Figura 10.8) de rango es:

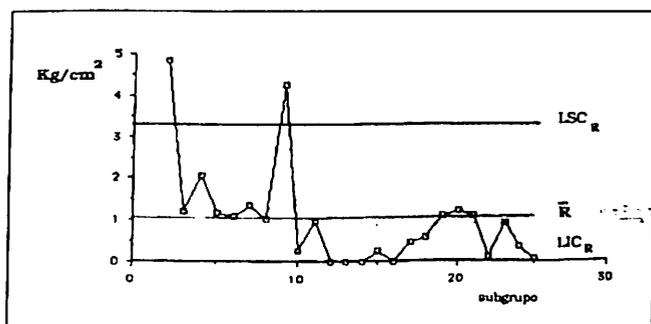


Figura 10.7. Gráfica de línea central

Interpretación:

- Se observó al graficar la línea central, los límites de control y los rangos móviles, que existe la presencia de causas no aleatorias en el proceso lo que implica, proceso fuera de control, lo que dice que no se procederá con la gráfica de lecturas individuales.
- El descontrol se observa en un cambio súbito de nivel hacia valores inferiores y hay que ir al proceso para su análisis y corrección.

Gráficos de Lectura Individuales (X)

- En un proceso químico en una planta de lácteos se producen "befches" de un producto, cada día.

Una característica de calidad del producto es su densidad en gramos/cm³ (g/cc). Los lácteos de densidad del último mes fueron:

Cuadro 10.6. Datos del proceso de planta de lácteos.

Día	Lectura (g/cc)	Rango móvil
1	12.42	-----
2	12.89	0.47
3	11.86	1.03
4	11.97	0.11
5	12.52	0.55
6	12.21	0.31
7	12.99	0.78
8	13.23	0.24
9	13.23	0.00
10	13.14	0.09
11	12.99	0.15

Cuadro 10.6.....(continuación)

12	12.25	0.74
13	11.85	0.40
14	11.94	0.09
15	12.35	0.41
16	12.53	0.18
17	12.57	0.04
18	12.75	0.18
19	12.32	0.43
20	12.01	0.31
21	12.81	0.80
22	12.74	0.07
23	12.34	0.40
24	11.87	0.47
25	11.96	0.09
26	12.82	0.86
27	13.22	0.40
28	12.58	0.64
29	12.61	0.03
30	12.01	0.60

El rango se calcula a partir del segundo betch $(12.89-12.42)= 0.47$

La línea central de rangos:

$$R = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1}}{n - 1}$$

$$R = \frac{10.87}{29} = 0.37$$

Para $n = 2$ en el Cuadro A.1

$$D_3 = 0$$

$$D_4 = 3.267$$

Los límites de rango son:

$$LIC_R = D_3 R = (0) (0.37) = 0$$

$$LSC_R = D_4 R = (3.267) (0.37) = 1.21$$

El gráfico queda así (Figura 10.8):

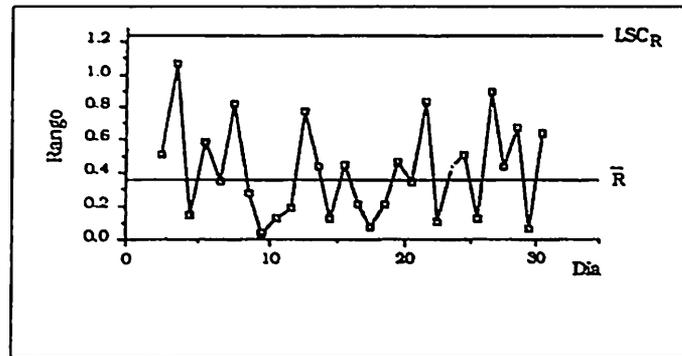


Figura 10.8. Gráfica de Rangos

La línea central \bar{X} es:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{374.98}{30} = 12.5$$

Los límites de control:

$$LSC_X = \bar{X} + E_2 \bar{R} = 12.5 + (2.66)(0.37) = 13.5$$

$$LIC_X = \bar{X} - E_2 \bar{R} = 12.5 - (2.66)(0.37) = 11.5$$

E_2 en la tabla del Cuadro A.6

El gráfico es (Figura 10.9):

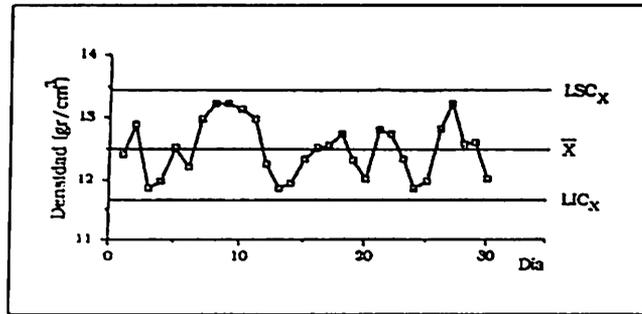


Figura 10.9. Gráfica de lecturas individuales

Interpretación:

- El patrón es aleatorio y dentro de los límites tanto en el gráfico R como en X por lo que el proceso está en control estadístico (Estable).

Gráfico X

Gráfico de control por lectura individuales (X) la línea de preparación A del departamento 7 tiene como trabajo preparar a baja temperatura, soluciones ácidas al 9 por ciento mínimo, para que al aplicarse en el proceso la calidad del producto sea adecuada. De cada preparación se toma una muestra con probeta y se analiza para determinar el por ciento de concentración.

Las observaciones durante dos días consecutivos se presentan en el Cuadro 10.7.

Cuadro 10.7. Datos del proceso de soluciones ácidas.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
8.0	8.5	7.4	10.5	9.3	11.1	10.4	9.4	9.0	10.0
X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	
11.7	10.3	16.2	11.6	11.5	11.0	12.0	11.0	10.2	
X20	X21	X22	X23	X24	X25	X26	X27	X28	
10.1	10.3	11.5	11.1	11.3	11.2	9.7	9.5	8.5	

Paso 1 - Llenar los datos del formato de gráficos.

Paso 2 - Graficar los datos y unirlos por una línea continua.

Paso 3 - Calcular la media de datos.

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$X = \frac{8.0 + 8.5 + \dots + 8.5}{28} = 10.44$$

Paso 4 - Graficar la media.

Paso 5 - Calcular los rangos móviles:

$$R_1 = (X_2 - X_1) ; R_2 = (X_3 - X_2)$$

$$R_{N-1} = (X_N - X_{N-1})$$

$$R_1 = (8.5 - 8.0) = 0.5$$

$$R_2 = (7.4 - 8.5) = (-1.1) = 1.1$$

$$R_3 = (10.5 - 7.4) = 3.1$$

·
·
·

$$R_{27} = (8.5 - 9.5) = (-1) = 1$$

Paso 6 - Graficar y unir mediante línea continua los rangos.

Paso 7 - Calcular la media de rangos \bar{R} .

$$R = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{N-1}}{N - 1}$$

$$R = \frac{0.5 + 1.1 + \dots + 1.0}{27} = 1.196$$

Paso 8 - Graficar R

Paso 9 - Calcule los límites de control.

$$LSC_X = \bar{X} + E_2 \bar{R}$$

$$LIC_X = \bar{X} - E_2 \bar{R}$$

Consideramos $N = 2$ $E_2 = 2.66$

$$LSC_X = 10.44 + 2.66 (1.196) = 13.62$$

$$LIC_X = 10.44 - 2.66 (1.196) = 7.26$$

Paso 10 - Calcule los límites de control para rangos.

$$LSC_R = D_4 \bar{R} = 3.267 (1.196) = 3.91$$

$$LIC_R = D_3 \bar{R} = (0) (1.196) = 0$$

Paso 11 - Graficar los límites.

Paso 12 - Interprete el gráfico (Figura 10.10).

Aplicando el Gráfico de Lecturas Individuales:

Paso 1 - Llenar el formato del gráfico con sus datos.

Paso 2 - Graficar los datos y unir por línea continua.

Paso 3 - Calcular la media (\bar{x})

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{1234 + 1200 + \dots + 1201}{20} = 12.06$$

Paso 4 - Graficar la media.

Paso 5 - Calcular los rangos móviles.

$$R_1 = (X_2 - X_1)$$

$$R_2 = (X_3 - X_2)$$

$$R_{N-1} = (X_n - X_{n-1})$$

$$R_1 = (1200 - 1234) = -34$$

$$R_2 = (1192 - 1200) = (-8) = 8$$

$$R_3 = (1215 - 1192) = 23$$

$$R_4 = (1198 - 1215) = (-17) = 17$$

$$R_5 = (1203 - 1198) = 5$$

$$R_6 = (1240 - 1203) = 37$$

$$R_7 = (1180 - 1240) = (-60) = 60$$

$$R_8 = (1196 - 1180) = 16$$

$$R_9 = (1193 - 1196) = (-3) = 3$$

$$R_{10} = (1245 - 1193) = 52$$

$$R_{11} = (1253 - 1245) = 8$$

$$R_{12} = (1197 - 1253) = (-56) = 56$$

$$R_{13} = (1210 - 1197) = 13$$

$$R_{14} = (1225 - 1210) = 15$$

$$R_{15} = (1235 - 1225) = 10$$

$$R_{16} = (1190 - 1235) = (-45) = 45$$

$$R_{17} = (1185 - 1190) = (-5) = 5$$

$$R_{18} = (1134 - 1185) = (-51) = 51$$

$$R_{19} = (1201 - 1134) = 67$$

$$\text{Paso 6} - \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n} = 27.63$$

Paso 7 - Graficar \bar{R}

Paso 8 - Graficar los rangos calculados.

Paso 9 - Calcular los límites de control de lectura individuales.

$$LSC_X = \bar{X} + E_2 \bar{R}$$

$$LSC_X = 12.06 + (2.66) (27.63) = 85.55$$

Para $n = 2$

$$LIC_X = \bar{X} - E_2 \bar{R}$$

$$LIC_X = 12.06 - (2.66) (27.63) = 61.43$$

Paso 10 - Calcular el gráfico de control para rangos.

$$LSC_R = D_4 \bar{R} = (3.267) (27.63) = 90.26$$

$$LIC_R = D_3 \bar{R} = (0) (27.63) = 0$$

Paso 11 - Graficar límites para X y R .

Paso 12 - Interpretar el gráfico.

Problema de Campo de una Planta de Dinamita (\bar{X} - S)

Un plan de muestreo de variables, es cuando para aceptarlo o rechazar los lotes de luces de bengalas con respecto al mínimo de intensidad luminosa requerido para dichas bengalas. El rechazo de los lotes, es muy frecuente, por lo que es necesario el monitoreo de los datos de muestreo obtenidos usando gráficos \bar{X} - S; como los tamaños de muestra varían de 4 a 20; se utilizan datos de 12 muestras obtenidas en 3 días, para el análisis del proceso.

Los datos son:

Cuadro 10.9. Datos del proceso de dinamita.

Datos	n	\bar{X}	S
Sept. 9	4	9.425	4.180
	5	16.660	3.559
	5	10.580	4.258
	5	10.780	2.476
Sept. 10	5	5.480	4.917
	10	9.890	5.800
	10	5.370	5.484
	20	17.700	3.893
	5	10.380	4.303
Sept. 13	7	9.343	3.814
	7	8.486	5.990
	20	12.905	5.914

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_{12}}{12} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \bar{X}_i}{\sum_{ni}} = \frac{1196.6}{103} = 11.62$$

$$S = \sqrt{\sum (n_i - 1) S_i^2 / (\sum n_i - k)} \quad (\text{Desviación desconocida})$$

$$S = \sqrt{2199.37 / 91} = \sqrt{24.169} = 4.92$$

Para $n = 5$:

$$\begin{aligned} \text{LSC}_x &= \bar{X} + A_3 S = 11.62 + 1.497(4.92) \\ &= 11.62 + 7.02 = 18.64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{LIC}_x &= \bar{X} - A_3 S = 11.62 - 1.497(4.92) \\ &= 4.60 \end{aligned}$$

$$\text{L.S.C}_s = \beta_4 S = 2.089 (4.92) = 10.28$$

$$\text{L.I.C}_s = \beta_3 S = (0) (4.92) = 0$$

Los límites de control para tamaño de muestra 4, 7, 10 y 20, se obtienen de manera similar (Figuras. 10.11 y 10.12).

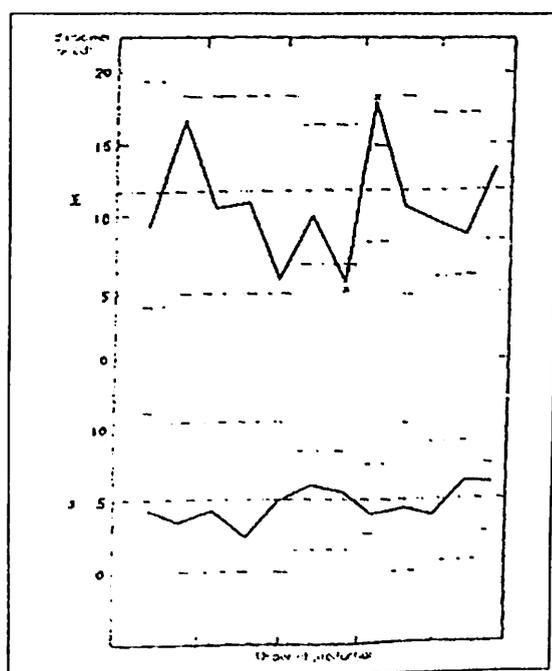


Figura 10.11. Límites de control.

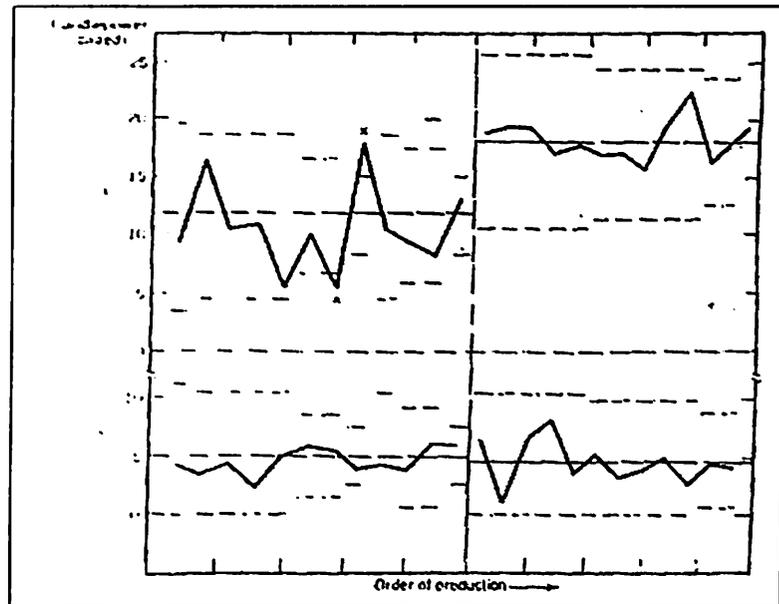


Figura 10.12. Límites de control.

El gráfico de control de S, muestra un patrón controlado mientras que el gráfico de medias muestra dos puntos fuera de control.

Estimando la desviación estándar, σ , usando S_i para $n = 5$ (el subgrupo más común):

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{C_4} = \frac{4.92}{0.94} = 5.2$$

Considerando que el proceso se distribuye aproximadamente normal, para la característica de calidad, siendo que una media que exceda $16 (3\sigma)$, es requerido, para el producto que se acerque a un valor mínimo de cero.

Acciones:

- Es necesario checar el proceso en detalle, ubicar las causas de desviación y corregir.
- Compararlo con la capacidad del proceso real.

Repaso de Interpretación del Gráfico

Lectura y Uso de la Gráfica de Control

Como hemos visto en los ejemplos, la lectura de una gráfica de control se realiza buscando puntos fuera de los límites de control o detectando patrones de anormalidad en el conjunto general de los puntos. A continuación se describen algunos de los patrones más comunes, y se da una descripción de las causas que pueden estar afectando el proceso. Estas causas, del tipo causas asignables, deben ser eliminadas lo más pronto posible, para recuperar el estado deseado de control del proceso. Cuando se tenga un proceso fuera de control, los responsables deben darse a la tarea de identificar las causas especiales que estén afectando el sistema, para llegar a eliminarlas.

Puntos Fuera de Control

Estos puntos se refieren a la presencia de una sola lectura que difiere mucho de las otras. A veces, un punto que parezca un salto realmente es una parte de un proceso estable. Este patrón es uno de los

más sencillos de reconocer, y por el hecho de darse en forma aislada es fácil de identificar y de determinar sus causas.

Posibles causas:

- Variación en el tamaño muestral.
- Toma de muestra de una distribución totalmente distinta

Tendencias continuas

Este patrón se define como una variación gradual y constante en forma ascendente o descendente, siendo este patrón fácil de reconocer. La tendencia puede surgir debido a causas que operen sobre el sistema de un modo gradual.

Posibles causas:

- Producto que se deteriora gradualmente.
- Desgaste en el equipo.
- Mejoramiento gradual de la técnica del empleado.
- Efecto de un mejor programa de mantenimiento de equipo.
- Efecto de control de procesos en otras áreas.

Cambio repentino de nivel

Un cambio repentino de nivel se presenta como un cambio súbito en una dirección. Una cierta cantidad de puntos se localizan en un solo

lado (inferior o superior) de la gráfica, y si los datos se graficaran separados, se verían dos distribuciones diferentes.

Posibles causas:

- Nuevo empleado.
- Nuevo jefe.
- Nuevo equipo o nuevo ajuste de equipo.
- Cambio en el método.
- Cambio en la motivación de los empleados.
- Cambio a un diferente proveedor.
- Cambio en los estándares.

Ciclo

Los ciclos son tendencias cortas que ocurren en patrones repetidos. Las causas de los ciclos son variables de proceso que se presentan de una manera más bien regular. Los ciclos pueden identificarse determinando el tiempo en el cual aparecen los picos sucesivos y relacionando este intervalo con los elementos del proceso.

Posibles causas:

- Efectos estacionales, tales como la temperatura o la humedad.
- Fatiga del empleado.
- Rotación del personal.
- Horarios de mantenimiento.

- Desgaste de equipo.
- Diferencia regular entre proveedores.

Inestabilidad

Un patrón inestable presenta puntos erráticos que fluctúan a lo largo de la gráfica de control, y la fluctuación parece ser muy ancha comparada con los límites de control. La inestabilidad puede deberse a una sola causa o a causas conjuntas. Aunque en este caso el patrón es complejo, recuerde que probablemente las causas son más bien simples.

Posibles causas:

- Ajuste excesivo del equipo.
- Empleado sin capacitación.
- Equipo que necesita reparación.
- Efecto de gráficas de control instaladas en otras áreas.
- Empleados sin experiencia.
- Empleados descuidados.
- Mantenimiento mediocre.
- Productos defectuosos.

CONCLUSIONES

- Casi cualquier proceso puede beneficiarse con el uso de los gráficos de control por variables.
- Es importante centrarse en el problema de estimación de los parámetros.
- Es importante un amplio conocimiento del proceso, para un análisis más efectivo.
- Es necesaria una selección adecuada del gráfico de control, que deberá fundamentarse en las características del proceso, políticas de la empresa y requerimientos de los clientes.
- Mediante el uso del gráfico de control se puede controlar la variabilidad de un proceso.
- Las acciones basadas en el gráfico de control deben ir orientadas a:
 - a) Acciones sobre el proceso.
 - b) Acciones sobre el producto.
 - c) Acciones de prevención.
 - d) Elaboración de informes.
- Los gráficos de control por su relación tiempo-aplicación se pueden clasificar en:
 - a) Acciones inmediatas.
 - b) Acciones de prevención.

- El uso de la herramienta estadística (aptitud), debe ir acompañada de una correcta actitud de los involucrados en términos de calidad de desempeño individual y en equipo.
- Es importante una amplia y adecuada capacitación del personal correspondiente en el uso adecuado de la herramienta, con la visión de lograr un autocontrol de la rutina de trabajo.
- La estadística pierde fortaleza, si no se lleva a la práctica en la solución de problemas, o bien, en el mejoramiento de un proceso productivo.

Observaciones

A medida que la tecnología ha cambiado, también ha sido necesario modificar los procedimientos para evaluar y monitorear un proceso cada vez más complejo por sus avances metodológicos; la estadística ha sido un área de apoyo muy efectiva, que ha podido aportar respuestas suficientes para el problema de estimación del proceso en lo correspondiente a su control y de su capacidad de habilidad y aptitud, con el objetivo de lograr productos correctos, acordes con especificaciones y expectativas de los clientes; ahí los gráficos de control, particularmente por variables, siguen siendo una herramienta muy útil, suficiente, y sobre todo accesible en su uso a personal no necesariamente experto en el control estadístico.

LITERATURA CITADA

- Ashcroft, A.G., Wareham, R., J. Gaillard. 1980. American Standard Association. Documento. General Electric. USA.
- AT&T. 1956. Statistical Quality y Control Handbook. Cap. IV. USA.
- Banks, T. 1989 . Principles of Quality control. Editorial Wiley, New York.
- Besterfield, D. 1997. Control de Calidad. Ed. Prentice Hall. Cap. 4 y Cap. 5. México.
- Control Estadístico de Procesos. 1999. Curso Licenciatura. ITESM. Saltillo, Coah.
- Control Estadístico de Procesos.1993. C.I.M.A.T. Diplomado. Maestría. Guanajuato, Guanajuato.
- Crosby, P. B. 1984. Quality Without Tears. Ed. McGraw-Hill. Capit. II. USA.
- Deming, W.E. 1989. Calidad, productividad y competitividad. Editorial Díaz de Santos. México.
- Dodge, H.F., and Roming, H.G. 1959. Sampling inspection Tables for single and double sampling. Second Edition. Ed. Wiley.
- Feigenbaum, A.F. 1983. Total Quality Control. Third Edition. Cap. 4 Cap 6. Mc Graw- Hill, New York.

- Fegan, M.D. 1974. A history of engineering and science in the Bell Systems. The early years. Ed. Bell Telephone Lab. Artículo. USA.
- Gutiérrez P., H. 1992. Control total de Calidad Editorial Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jal.
- Grant, E.L. y Leaven Worth, R.S. 1972. Control estadístico de calidad. CECSA.
- Hotelling, H. 1947. Control de calidad multivariado. Trabajo de investigación.
- Ishikawa, K. 1986. ¿Qué es el Control total de Calidad? Editorial Norma. Santa Fe de Bogotá, Colombia.
- Ishikawa, K. 1994. Introducción al control de calidad. Editorial Diaz de Santos.
- Juran, J.M. 1974. Quality control Handbook. Third Edition. McGraw-Hill, new York.
- Montgomery, D.C. and W.W., Hines. 1990. Probability and Statistics in engineering and management Science. Third Edition. Wiley, new York.
- Montgomery, D.C. 1991. Statistical Quality control. Second Edition, Editorial Wiley, New York.
- Kume, H. 1993. Herramientas estadísticas básicas para el mejoramiento de la calidad. 2ª edición, Editorial Norma.
- Sherkenbaich, W. 1990. La ruta Deming. Editorial CECSA, Cd. De México.

- Shewart, W.A. 1925. The applications of statistics as an aid in maintaining quality of manufactured product. Journal of American Statistical Association. USA.
- Small, B. 1956. Statistical quality control. Handbook (AT&T. USA.
- Statistical Process Control. 1995. Saltillo, Coah. G.M.. -Chrysler - FORD
- Taguchi, G. 1986. Introduction to Quality Engineering. Asian Productivity Organization, Japan.
- Tecnología Estadística. GIS. 1986.
- Tema selector II. Control estadístico de proceso: (Las 7 herramientas). 1991, 1992. F.C.Q.- U.A. de C. Saltillo, Coah.
- Wade, M. y Woodall W. 1993. A review and analysis of cause-selecting control charts. Trabajo publicado. Vol. 25. July. Relationship to the Hotelling T^2 Chart.
- Wadsworth, H.M. Jr; Stephens K.S.; Blanton God Frey A. Editorial Wiley and Sons.
- Walpole. R.E. y Myers R.H. 1982. Probabilidad y estadística para Ingenieros Ed. Interamericana para México. 97.

A P E N D I C E

Los siguientes cuadros se elaboraron para facilitar al usuario el cálculo de los gráficos de control que podrán ser utilizados en el caso correspondiente.

Cuadro A.2. Cálculo de medianas - rangos.

Criterio	Lim. Con. \bar{X}	Extensión	Lim. Con. \bar{R}	Lim Con \bar{R}
$\bar{X} - \bar{R}$	$\bar{X} \pm A_5 \bar{R}$	3σ	L.S.C. = $D_6 \bar{R}$ L.I.C. = $D_5 \bar{R}$	-----
$\bar{X} - \bar{R}$	$\bar{X} \pm 3 e_4 \left(\frac{\bar{R}}{d_4} \right)$	3σ	L.S.C. = $D_6 \bar{R}$ L.I.C. = $D_5 \bar{R}$	-----
$\bar{X} - \bar{R}$	$\mu \pm 3 \sigma_x$	3σ	L.S.C. = $D_6 \bar{R}$ L.I.C. = $D_5 \bar{R}$	-----
$\bar{X} - \bar{R}$	$\bar{X} \pm m_3 A_3 \bar{R}$	3σ	L.S.C. = $D_6 \bar{R}$ L.I.C. = $D_5 \bar{R}$	-----
$\bar{X} - \bar{R}$	$\bar{X} \pm A_3 \bar{R}$	3σ	L.S.C. = $D_6 \bar{R}$ L.I.C. = $D_5 \bar{R}$	-----
$\bar{X} - R$	$\bar{X} \pm A_6 R$	3σ	----- -----	L.S.C. = $D_4 \bar{R}$ L.I.C. = $D_3 \bar{R}$
$\bar{X} - \bar{R}$	$\bar{X} \pm 3 e_4 \left(\frac{\bar{R}}{d_2} \right)$	3σ	----- -----	L.S.C. = $D_4 \bar{R}$ L.I.C. = $D_3 \bar{R}$
$\bar{X} - R$	$\mu \pm 3 \sigma_x$	3σ	----- -----	L.S.C. = $D_4 \bar{R}$ L.I.C. = $D_3 \bar{R}$
$\bar{X} - R$	$\bar{X} \pm A_2 R$	$\leq 2\sigma$	----- -----	L.S.C. = $D_4 \bar{R}$ L.I.C. = $D_3 \bar{R}$

Cuadro A.2.....continuación.

Criterio	Lim. Con. $\bar{X} \pm A_5 \bar{R}$	$\bar{X} \pm 3 e_4 \left(\frac{\bar{R}}{d_4} \right)$
$\bar{X} - \bar{R}$	$\bar{X} \pm A_5 \bar{R}$	
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se localiza la mediana del subgrupo. 2. (La mediana aritmética de los dos valores medios, de datos ordenados) 3. Se calcula la media de las medianas $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{N}$ 4. Se calcula los rangos en cada subgrupo. $R = VF - Vi$ 5. Se calcula la mediana de los rangos: \bar{R} 6. Consultar en la tabla el valor A_5 para $n = 5$ 7. Calcular los límites 8. Graficar los límites y el promedio. 9. Graficar los puntos (datos) 10. Analizar el gráfico. 11. Toma de decisiones. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Localizar la mediana del subgrupo. 2. Calcular la media aritmética de las medianas. 3. Calcular los rangos de subgrupos. 4. Calcular la mediana de los rangos: \bar{R} 5. Consultar en la tabla H el valor e_4 para $n = 5$. 6. Consultar en la tabla el valor de d_4 para $n = 5$ 7. Calcular los límites 8. Graficar los límites y el promedio. 9. Graficar los puntos 10. Analizar el gráfico. 11. Toma de decisiones.

Cuadro A.2.....continuación

Criterio	$\mu \pm 3\sigma_x$	$\bar{X} \pm m_3 A_3 \bar{R}$	Criterio
$\bar{X} - \bar{R}$	<p>1. Calcular μ dado que $\mu = \bar{X}$</p> <p>a) Calcular la mediana del subgrupo.</p> <p>b) Calcular la media aritmética de las medianas.</p> <p>2. Calcular σ_x</p> <p>$\sigma_x = e_4 \sigma$</p> <p>a) Consultar e_4 para $n = 5$ en la tabla H.</p> <p>b) Calcular la desviación std.</p> <p>3. Calcular los límites.</p> <p>4. Graficar los límites y el promedio.</p> <p>5. Graficar los puntos.</p> <p>6. Analizar el gráfico.</p> <p>7. Toma de decisiones.</p> <p>σ = desviación estándar de las individuales</p>	<p>1. Calcular la mediana de las medianas</p> <p>2. Consultar en la tabla 3 A.1 el coeficiente $m_3 A_{30}$ para $n=5$</p> <p>3. Calcularlos límites</p> <p>4. Graficar los puntos</p> <p>5. Analizar el gráfico</p> <p>5. Toma de decisiones.</p>	$\bar{X} - \bar{R}$
		$\bar{X} \pm A_3 \bar{R}$	Criterio
			$\bar{X} - \bar{R}$
		<p>1. Calcular la media de cada subgrupo</p> <p>2. Calcular la mediana de las medias.</p> <p>3. Calcular los rangos de cada subgrupo.</p> <p>4. Calcular la mediana de los rangos.</p> <p>5. Consultar en tablas A_3 para $n= 5$</p> <p>6. Calcular los límites</p>	<p>7. Gráficar los límites y el promedio.</p> <p>8. Gráficar los puntos.</p> <p>9. Analizar el gráfico.</p> <p>10. Toma de decisiones.</p>

Cuadro A.2.....continuación

Criterio	$\bar{X} \pm A_6R$	$\bar{X} \pm 3e_4 \left(\frac{\bar{R}}{d_4} \right)$	$\mu \pm 3\sigma_x(3)$
$\bar{X} - R$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Localizar la mediana en cada subgrupo. 2. Calcular la media de las medianas. 3. Calcular el rango en cada grupo (Ri) 4. Calcular la media de rangos. 5. Consultar en tablas A_6 para $n = 5$. 6. Graficar los límites y el promedio. 7. Graficar los puntos. 8. Analizar el gráfico. 9. Toma de decisiones. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Localizar la mediana en cada subgrupo. 2. Calcular la media de las medianas. 3. Calcular el rango de cada subgrupo. 4. Calcular la media de rangos. 5. Consultar en la tabla H el coeficiente e_4 para $n=5$. 6. Consultar en tablas el valor de d_2 para $n=5$. 7. Calcular los límites 8. Graficar los límites y el promedio. 9. Graficar los puntos 10. Analizar el gráfico 11. Toma de decisiones 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Localizar la mediana en cada subgrupo. 2. Calcular la media de las medianas. 3. Calcular $\sigma_x = e_4\sigma$ 4. Calcular los límites 5. Graficar los límites y el promedio. 6. Grafique los puntos 7. Analizar el gráfico. 8. Toma de decisiones <p>$\sigma =$ desviación estándar de los individuales</p>

Cuadro A.2.....continuación

Criterio	$\bar{X} \pm A_2\bar{R}$	
$\bar{X} - R$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Localizar la mediana de cada subgrupo. 2. Calcular la media de las medianas. 3. Calcular el rango de cada subgrupo. 4. Consultar en tablas el coeficiente A_2 para $n=5$. 5. Calcular lo límites. 6. Graficar los límites y el promedio. 7. Graficar los datos 8. Analizar el gráfico. 9. Toma de decisiones. 	
Criterio	Cálculo del gráfico de rangos	$L.S.C. = D_4\bar{R}$ $L.I.C. = D_3\bar{R}$
Para \bar{R} y \bar{R}	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcular el rango del sub-grupo. 2. Calcular la media de los rangos. 3. Consultar el coeficiente D_4 para $n=5$. 4. Consultar el coeficiente D_3 para $n=5$. 5. Calcular los límites de control. 6. Graficar los límites y el promedio. 7. Graficar los puntos. 8. Analizar el gráfico. 9. Toma de decisiones. 	

CUADRO A.3

CONSTANTES PARA LAS GRAFICAS DE CONTROL

Número de observaciones n	A ₂	A ₃	A ₆	B ₃	B ₄	C ₄	d ₂	d ₃	d ₄	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	E ₂
2	1.880	2.659		0.000	3.267	0.7979	1.128	0.853	0.954	0.000	3.267	0.000	3.865	2.660
3	1.023	1.954	1.187	0.000	2.568	0.8862	1.693	0.888	1.588	0.000	2.574	0.000	2.745	1.772
4	0.729	1.628		0.000	2.266	0.9213	2.059	0.880	1.978	0.000	2.282	0.000	2.375	1.457
5	0.577	1.427	0.691	0.000	2.089	0.9400	2.326	0.864	2.257	0.000	2.114	0.000	2.179	1.290
6	0.483	1.287		0.030	1.970	0.9515	2.534	0.848	2.472	0.000	2.004	0.000	2.055	1.184
7	0.419	1.182	0.509	0.118	1.882	0.9594	2.704	0.833	2.645	0.076	1.924	0.078	1.967	1.109
8	0.373	1.099		0.185	1.815	0.9650	2.847	0.820	2.791	0.136	1.864	0.139	1.901	1.054
9	0.337	1.032	0.412	0.239	1.761	0.9693	2.970	0.808	2.915	0.184	1.816	0.187	1.850	1.010
10	0.308	0.975		0.284	1.716	0.9727	3.078	0.797	3.024	0.223	1.777	0.227	1.809	0.975
11	0.285	0.927	0.350	0.321	1.679	0.9754	3.173	0.787	3.121	0.256	1.744			
12	0.266	0.886		0.354	1.646	0.9776	3.258	0.778	3.207	0.283	1.717			
13	0.249	0.850		0.382	1.618	0.9794	3.336	0.770	3.285	0.307	1.693			
14	0.235	0.817		0.406	1.594	0.9810	3.407	0.762	3.356	0.328	1.672			
15	0.223	0.789		0.428	1.572	0.9823	3.472	0.755	3.422	0.347	1.653			
16	0.212	0.763		0.448	1.552	0.9835	3.532	0.749	3.482	0.363	1.637			
17	0.203	0.739		0.466	1.534	0.9845	3.588	0.743	3.538	0.378	1.622			
18	0.194	0.718		0.482	1.518	0.9854	3.640	0.738	3.591	0.391	1.608			
19	0.187	0.698		0.497	1.503	0.9862	3.689	0.733	3.640	0.403	1.597			
20	0.180	0.680		0.510	1.490	0.9869	3.735	0.729	3.686	0.415	1.585			
21	0.173	0.663		0.523	1.477	0.9876	3.778	0.724	3.730	0.425	1.575			
22	0.167	0.647		0.534	1.466	0.9882	3.819	0.720	3.771	0.434	1.566			
23	0.162	0.633		0.545	1.455	0.9887	3.858	0.716	3.811	0.443	1.557			
24	0.157	0.619		0.555	1.445	0.9892	3.895	0.712	3.847	0.451	1.548			
25	0.153	0.606		0.565	1.435	0.9896	3.931	0.709	3.883	0.459	1.541			
Más de 25				$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$1 - \frac{3}{\sqrt{2n}}$								$1 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$	

CUADRO A. 4
Coefficientes para los gráficos de control $\bar{x} - R$

Tamaño de los subgrupos n	\bar{x}		Cuando se utiliza \bar{R}					
	m_3	$m_3 A_2$	\bar{x}	x	\bar{x}	R		
			A_3	E_3	$m_3 A_3$	dm	D_3	D_3
2	1,000	1,880	2,224	3,14	2,224	0,954	-	3,864
3	1,160	1,187	1,091	1,89	1,265	1,588	-	2,744
4	1,092	0,796	9,758	1,52	0,828	1,978	-	2,375
5	1,198	0,691	0,594	1,33	0,712	2,257	-	2,179
6	1,135	0,549	0,495	1,21	0,562	2,472	-	0,255
7	1,214	0,509	0,429	1,13	0,520	2,645	0,078	1,967
8	1,160	0,432	0,380	1,07	0,441	2,791	0,139	1,902
9	1,223	0,412	0,343	1,03	0,419	2,916	0,187	1,850
10	1,177	0,363	0,314	0,99	0,369	3,024	0,227	1,808

CUADRO A. 5
Coefficientes para los gráficos de control $\bar{x} - R$

Tamaño del subgrupo n	Gráfico de control \bar{x}		Gráfico de control R				Relación entre $\hat{\sigma}$ y \bar{R} , $\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$		
	A	A_2	D_1	D_2	D_3	D_4	d_2	$1/d_2$	d_1
2	2,121	1,880	-	3,686	-	3,267	1,128	0,886	0,853
3	1,732	1,023	-	4,358	-	2,575	1,693	1,591	0,888
4	1,500	0,729	-	4,698	-	2,282	2,059	0,486	0,880
5	1,342	0,577	-	4,918	-	2,115	2,326	0,430	0,864
6	1,225	0,483	-	5,078	-	2,004	2,534	0,395	0,848
7	1,134	0,419	0,205	5,203	0,076	1,924	2,704	0,270	0,883
8	1,061	0,373	0,387	5,307	0,136	1,864	2,847	0,351	0,820
9	1,000	0,337	0,546	5,394	0,184	1,816	2,970	0,337	0,808
10	0,949	0,308	0,687	5,469	0,223	1,777	3,078	0,325	0,797

CUADRO A. 6
Distribuciones de los estadísticos (para variables).
Población infinita (media de la población μ , varianza de la población σ^2)

Estadístico	Símbolo	Hipótesis	Media E ()	Desviación estándar D ()	Varianza V ()	Forma de la distribución
Media	\bar{x}	Ninguna	μ	σ/\sqrt{n}	σ^2/n	Se aproxima a la distribución normal al aumentar n
Varianza	V	Distribución normal	σ^2	$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \sigma^2$	$\frac{2}{n-1} \sigma^4$	La cola se extiende hacia el lado del valor más alto
Desviación estándar	s	"	$c_2 \cdot \sigma$	$c_3 \cdot \sigma$	$(c_3 \cdot \sigma)^2$	"
Recorrido	R	"	$d_2 \sigma$	$d_3 \sigma$	$(d_3 \sigma)^2$	"

c_2 , c_3 , d_2 y d_3 son coeficientes para la distribución normal cuyos valores varían con n . Se obtienen en tablas (ver la Tabla 2A.5 y la Tabla 3.3). Sus valores no cambian mucho aunque la distribución de la población no sea exactamente normal.

CUADRO A. 7
Distribuciones de los estadísticos (para enumerables)

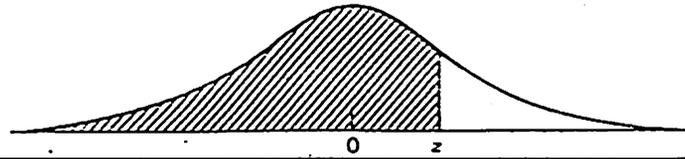
Estadístico	Símbolo	Población	Media	Desviación estándar D ()	Distribución	Forma de la distribución
Proporción de unidades defectuosas	p	P	P	$\sqrt{P(1-P)/n}$	Binomial	La cola se extiende hacia la derecha
Número de unidades defectuosas	$r = pn$	P	nP	$\sqrt{nP(1-P)}$	Binomial	
Número de defectos por unidad	$u = c/n$	U	U	$\sqrt{U/n}$	Poisson	Se aproxima a la distribución normal al aumentar n
Número de defectos	c	C	C	\sqrt{C}	Poisson	

Esta distribución de los estadísticos es una de las características básicas importantes de las herramientas estadísticas.

CUADRO A.8

Distribución acumulativa normal estándar

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	z
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.0
0.1	0.53983	0.54379	0.54776	0.55172	0.55567	0.1
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.2
0.3	0.61791	0.62172	0.62551	0.62930	0.63307	0.3
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.4
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.5
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.6
0.7	0.75803	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.7
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79954	0.8
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.9
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	1.0
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87285	1.1
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	1.2
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	1.3
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	1.4
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	1.5
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	1.6
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	1.7
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	1.8
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	1.9
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	2.0
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	2.1
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	2.2
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	2.3
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	2.4
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	2.5
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	2.6
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	2.7
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	2.8
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	2.9
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	3.0
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	3.1
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	3.2
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	3.3
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	3.4
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	3.5
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	3.6
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	3.7
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	3.8
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	3.9

CUADRO A.8 CONTINUACION

Apéndice

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.0	0.519 94	0.523 92	0.527 90	0.531 88	0.535 86	0.0
0.1	0.559 62	0.563 56	0.567 49	0.571 42	0.575 34	0.1
0.2	0.598 71	0.602 57	0.606 42	0.610 26	0.614 09	0.2
0.3	0.636 83	0.640 58	0.644 31	0.648 03	0.651 73	0.3
0.4	0.673 64	0.677 24	0.680 82	0.684 38	0.687 93	0.4
0.5	0.708 84	0.712 26	0.715 66	0.719 04	0.722 40	0.5
0.6	0.742 15	0.745 37	0.748 57	0.751 75	0.754 90	0.6
0.7	0.773 37	0.776 37	0.779 35	0.782 30	0.785 23	0.7
0.8	0.802 34	0.805 10	0.807 85	0.810 57	0.813 27	0.8
0.9	0.828 94	0.831 47	0.833 97	0.836 46	0.838 91	0.9
1.0	0.853 14	0.855 43	0.857 69	0.859 93	0.862 14	1.0
1.1	0.874 93	0.876 97	0.879 00	0.881 00	0.882 97	1.1
1.2	0.894 35	0.896 16	0.897 96	0.899 73	0.901 47	1.2
1.3	0.911 49	0.913 08	0.914 65	0.916 21	0.917 73	1.3
1.4	0.926 47	0.927 85	0.929 22	0.930 56	0.931 89	1.4
1.5	0.939 43	0.940 62	0.941 79	0.942 95	0.944 08	1.5
1.6	0.950 53	0.951 54	0.952 54	0.953 52	0.954 48	1.6
1.7	0.959 94	0.960 80	0.961 64	0.962 46	0.963 27	1.7
1.8	0.967 84	0.968 56	0.969 26	0.969 95	0.970 62	1.8
1.9	0.974 41	0.975 00	0.975 58	0.976 15	0.976 70	1.9
2.0	0.979 82	0.980 30	0.980 77	0.981 24	0.981 69	2.0
2.1	0.984 22	0.984 61	0.985 00	0.985 37	0.985 74	2.1
2.2	0.987 78	0.988 09	0.988 40	0.988 70	0.988 99	2.2
2.3	0.990 61	0.990 86	0.991 11	0.991 34	0.991 58	2.3
2.4	0.992 86	0.993 05	0.993 24	0.993 43	0.993 61	2.4
2.5	0.994 61	0.994 77	0.994 92	0.995 06	0.995 20	2.5
2.6	0.995 98	0.996 09	0.996 21	0.996 32	0.996 43	2.6
2.7	0.997 02	0.997 11	0.997 20	0.997 28	0.997 36	2.7
2.8	0.997 81	0.997 88	0.997 95	0.998 01	0.998 07	2.8
2.9	0.998 41	0.998 46	0.998 51	0.998 56	0.998 61	2.9
3.0	0.998 86	0.998 89	0.998 93	0.998 97	0.999 00	3.0
3.1	0.999 18	0.999 21	0.999 24	0.999 26	0.999 29	3.1
3.2	0.999 42	0.999 44	0.999 46	0.999 48	0.999 50	3.2
3.3	0.999 60	0.999 61	0.999 62	0.999 64	0.999 65	3.3
3.4	0.999 72	0.999 73	0.999 74	0.999 75	0.999 76	3.4
3.5	0.999 81	0.999 81	0.999 82	0.999 83	0.999 83	3.5
3.6	0.999 87	0.999 87	0.999 88	0.999 88	0.999 89	3.6
3.7	0.999 91	0.999 92	0.999 92	0.999 92	0.999 92	3.7
3.8	0.999 94	0.999 94	0.999 95	0.999 95	0.999 95	3.8
3.9	0.999 96	0.999 96	0.999 96	0.999 97	0.999 97	3.9

CUADRO A.10

No. of Observa- tions in Sample n	d ₂	d ₃	d ₄	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆	d ₂ /c ₂	d ₃ /c ₃
2	1.128	0.853	0.954	0	3.686	0	3.269	0	3.68	1.999	1.414
3	1.693	0.888	1.588	0	4.358	0	2.574	0	2.67	2.340	1.910
4	2.059	0.880	1.978	0	4.698	0	2.282	0	2.33	2.581	2.235
5	2.326	0.864	2.257	0	4.918	0	2.114	0	2.14	2.767	2.474
6	2.534	0.848	2.472	0	5.078	0	2.004	0	2.02	2.917	2.663
7	2.704	0.833	2.645	0.205	5.203	0.076	1.924	0.055	1.94	3.044	2.704
8	2.847	0.820	2.791	0.387	5.307	0.136	1.864	0.119	1.88	3.154	2.950
9	2.970	0.808	2.915	0.546	5.394	0.184	1.816	0.168	1.83	3.250	3.064
10	3.078	0.797	3.024	0.687	5.469	0.223	1.777	0.209	1.79	3.336	3.164
11	3.137	0.787	3.120	0.812	5.534	0.256	1.744	0.243	1.75	3.412	3.253
12	3.258	0.778	3.207	0.924	5.592	0.284	1.716	0.272	1.72	3.481	3.333
13	3.336	0.770	3.285	1.026	5.646	0.308	1.692	0.297	1.70	3.545	3.406
14	3.407	0.762	3.356	1.121	5.693	0.329	1.671	0.319	1.68	3.604	3.473
15	3.472	0.755	3.422	1.207	5.737	0.348	1.652	0.338	1.66	3.659	3.535
16	3.532	0.749	3.482	1.285	5.779	0.364	1.636	0.355	1.64	3.709	3.591
17	3.588	0.743	3.538	1.359	5.817	0.379	1.621	0.370	1.63	3.757	3.644
18	3.640	0.738	3.591	1.426	5.854	0.392	1.608	0.383	1.61	3.801	3.694
19	3.689	0.733	3.640	1.490	5.888	0.404	1.596	0.396	1.60	3.843	3.741
20	3.735	0.729	3.686	1.548	5.922	0.414	1.586	0.407	1.59	3.883	3.785
21	3.778	0.724	3.729	1.606	5.950	0.425	1.575	0.418	1.58	3.920	3.825
22	3.819	0.720	3.771	1.659	5.979	0.434	1.566	0.427	1.57	3.955	3.865
23	3.858	0.716	3.810	1.710	6.006	0.443	1.557	0.436	1.56	3.990	3.902
24	3.895	0.712	3.847	1.759	6.031	0.452	1.548	0.445	1.55	4.022	3.938
25	3.931	0.709	3.882	1.804	6.058	0.459	1.541	0.452	1.54	4.054	3.972

CUADRO A.11

n	A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	E_1	E_2	E_3
2	2.121	3.760	1.880	2.659	2.223	2.223	1.880	1.880	5.318	2.660	3.760
3	1.732	2.394	1.023	1.954	1.266	1.137	1.187	1.067	4.146	1.772	3.385
4	1.500	1.880	0.729	1.628	0.828	0.828	0.796	0.796	3.760	1.457	3.256
5	1.342	1.596	0.577	1.427	0.712	0.681	0.691	0.660	3.568	1.290	3.191
6	1.225	1.410	0.483	1.287	0.563	0.595	0.549	0.580	3.454	1.184	3.153
7	1.134	1.277	0.419	1.182	0.521	0.533	0.509	0.521	3.378	1.109	3.127
8	1.061	1.175	0.373	1.099	0.443	0.487	0.434	0.477	3.323	1.054	3.109
9	1.000	1.094	0.337	1.032	0.420	0.453	0.412	0.444	3.283	1.010	3.095
10	0.949	1.028	0.308	0.975	0.371	0.427	0.365	0.419	3.251	0.975	3.084
11	0.905	0.973	0.285	0.927	0.356	0.406	0.350	0.399	3.226	0.946	3.076
12	0.866	0.925	0.266	0.886	0.322	0.388	0.317	0.382	3.205	0.921	3.069
13	0.832	0.884	0.249	0.850	0.311	0.374	0.306	0.368	3.188	0.899	3.063
14	0.802	0.848	0.235	0.817	0.296	0.361	0.282	0.356	3.174	0.881	3.058
15	0.775	0.816	0.223	0.789	0.278	0.351	0.274	0.346	3.161	0.864	3.054
16	0.750	0.788	0.212	0.763	0.260	0.342	0.257	0.337	3.150	0.849	3.050
17	0.728	0.762	0.203	0.739	0.254	0.344	0.250	0.329	3.141	0.836	3.047
18	0.707	0.738	0.194	0.718	0.240	0.327	0.237	0.322	3.133	0.824	3.044
19	0.688	0.717	0.187	0.698	0.234	0.319	0.231	0.315	3.125	0.813	3.042
20	0.671	0.697	0.180	0.680	0.221	0.313	0.218	0.308	3.119	0.803	3.040
21	0.655	0.679	0.173	0.663	0.218	0.307	0.215	0.303	3.113	0.794	3.038
22	0.640	0.662	0.167	0.647	0.207	0.302	0.204	0.298	3.107	0.785	3.036
23	0.626	0.647	0.162	0.633	0.205	0.296	0.202	0.292	3.103	0.778	3.034
24	0.612	0.632	0.157	0.619	0.194	0.292	0.192	0.288	3.098	0.770	3.033
25	0.600	0.619	0.153	0.606	0.193	0.287	0.191	0.284	3.094	0.763	3.032
25	$3\sqrt{n}$	$3(0_2\sqrt{n})$	$3(0_2\sqrt{n})$	$3(0_1\sqrt{n})$	$3e_3d_3$	$3e_4d_4$	$3e_5d_5$	$3e_6d_6$	$3e_7$	$3e_2$	$3e_4$

Values of A , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , A_7 and E_1 , E_2 and E_3 are from the ASTM-STP 150 by kind permission of the American Society for Testing and Materials.