Un criterio integral de causalidad para procesos autorregresivos y de promedios móviles

An Integral Causality Criterion for Autoregressive and Moving average Processes

Julio César Chacón Hernández

Departamento de Estadística y Cálculo, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro. Calzada Antonio Narro 1923, col. Buenavista, C.P. 25315, Saltillo, Coah., México. E-mail: july2019@hotmail.com

RESUMEN

Este trabajo trata sobre la idea de causalidad de un proceso autorregresivo y de promedios móviles (ARMA, por sus siglas en inglés). Se discute la relevancia de este concepto en el problema de determinar la función de autocovarianza del proceso, y se analiza un criterio frecuentemente encontrado en la literatura para determinar la causalidad de un proceso con polinomio autorregresivo de segundo grado, mostrando que dicho criterio no es universalmente válido. La contribución principal del trabajo es la caracterización de la noción de causalidad de un polinomio por medio de una integral sobre el círculo unitario del plano complejo.

Palabras clave: Modelos autorregresivos y de promedios móviles, series de tiempo estacionarias, integral de una función, círculo unitario, polinomio lineal

ABSTRACT

This work is about the causality of an autoregressive and moving average (ARMA) process. The importance of this idea to determine the autocovariance function of the process is analyzed, and an algebraic criterion for the causality of a second order autoregressive polynomial is briefly discussed; such a criterion is frequently stated in the literature, and it is proved that is not valid in general. The main contribution of the job is the formulation of a new causality criterion in terms of a complex integral on the unit circle.

Key words: Autoregressive moving average, stationary time series, an integral of a function, unit circle, linear polynomial

INTRODUCCIÓN

Este trabajo trata sobre la clase de series de tiempo estacionarias conocida como procesos autorregresivos y de promedios, brevemente referida como procesos ARMA; el principal interés se centra en la idea de causalidad del proceso. El principal objetivo es establecer un criterio para decidir si un proceso es o no causal.

Recibido: Agosto 2010 • Aprobado: Septiembre 2013

En términos generales, una serie de tiempo es una sucesión $\{X_t\}$ de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, donde la variable aleatoria X_t se interpreta como la observación que se realiza en el tiempo t, el cual, en el caso considerado en este trabajo, puede variar en el conjunto de los números enteros. El rasgo fundamental de la sucesión $\{X_t\}$ es que en contraste con el supuesto comúnmente adoptado en la teoría estadística clásica (Borovkov, 1999; Dudewica y Mishra, 1998; Shao, 2010; Wackerly *et al*., 2009), no se supone la independencia de las variables X_t, ni que éstas tengan la misma distribución, características que permiten incluir en el estudio una gran variedad de observaciones que surgen en la práctica (Brockwell y Davis, 1998; Shumway y Stoffer, 2006). La serie $\{X_t\}$ es estacionaria cuando propiedades relevantes de un segmento $(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ son las mismas que las del segmento trasladado $(X_{1+h}, X_{2+h},\ldots,X_{n+h})$ para cada entero h; como no se hace algún supuesto sobre la distribución de los datos X_t, las propiedades importantes son las que se refieren a sus momentos. Formalmente, una serie es estacionaria si

(a) $E[Xt] = \mu$ no depende de t;
(b) Para cada s y t, $\operatorname{cov}(X_s, X_t)$ está bien definida y depende sólo de la diferencia entre s y t.

Estas propiedades permiten definir la función de autocovarianza asociada a la serie estacionaria

$\{X_t\}$ mediante

$$\gamma(h) = E[X_{t+h}X_t], \qquad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1.1)$$

la cual captura la estructura de dependencia lineal entre las diversas variables que componen la serie (Graybill, 2000, 2001). Las series estacionarias son parte esencial del denominado *modelo clásico*, el cual se adapta bien como modelo a una gran variedad de datos que surgen en la práctica.

Este trabajo se organiza en varias secciones, primero se introduce la familia de procesos ARMA, luego se analiza la existencia de tales procesos. En seguida, se define la idea de causalidad, se discute la relevancia de este concepto y se analiza un criterio frecuentemente encontrado en la literatura para decidir si un polinomio autorregresivo es causal, mostrando que tal criterio no es universalmente válido. Después, se introduce la idea de integral de una función sobre el círculo unitario, utilizada para enunciar el nuevo criterio de causalidad que se propone en este trabajo. Dicho criterio se demuestra para el caso de un polinomio lineal y, finalmente, para el caso general.

La exposición concluye mostrando la implementación del criterio en el lenguaje de programación *R*.

Procesos ARMA

En esta sección se introduce una clase muy importante de procesos estacionarios, a saber, la familia de procesos autorregresivos y de promedios móviles, comúnmente referida como la clase ARMA de series estacionarias.

Definición 2.1. *Considere un ruido blanco* $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$ *y sea* $\{X_t\}$ *una serie estacionaria con media nula.*

(i) *La serie* $\{X_t\}$ *es un proceso de promedios móviles de orden q (MA (q)) si existen números (reales)* $\theta_1,\ldots\, \theta_q$ *tales que*

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \ldots + \theta_q Z_{t-q}$$

(ii) *El proceso* $\{X_t\}$ *es autorregresivo de orden p (AR (p)) si*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

para números (reales) $\theta_1,\ldots\, \theta_p$;

(iii) *La serie* $\{X_t\}$ *es un proceso autorregresivo y de promedios móviles de orden (p, q) –de forma abreviada, (ARMA (p, q))– si existen números* $\phi_1,\ldots\phi_p$ *y* $\theta_1,\ldots\, \theta_q$ *tales que*

$$X_t = \phi_{1q} X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_q Z_{t-q}. \quad (2.1)$$

Son varias las razones por las que los procesos ARMA desempeñan un papel importante en la teoría y aplicaciones de las series de tiempo: primeramente, el problema de pronóstico puede analizarse de manera sencilla para esos procesos, y algoritmos generales —como el algoritmo de innovaciones— se implementan de manera simple y eficiente para estos procesos. Por otro lado, es claro que ningún proceso real obedecerá de manera exacta a un modelo teórico, pero para cualquier proceso estacionario $\{Y_t\}$ es posible seleccionar un proceso ARMA $\{X_t\}$ cuya función de autocovarianza está arbitrariamente cercana a la de $\{Y_t\}$, en el sentido de que $\max_h |\gamma_x(h)-\gamma_y(h)|$ es tan pequeña como se desee, si el orden (p, q) y los coeficientes del proceso ARMA se eligen adecuadamente (Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1988).

Si $\phi_1,\ldots\phi_p$ y $\theta_1,\ldots\, \theta_q$ son como en la Definición 2.1, los polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ se especifican mediante

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z_1 + \theta_q z^q \qquad (2.2)$$

y

$$\phi(z)=1-\phi_1 z_1-\ldots-\phi_p z^p, \qquad (2.3)$$

los cuales se denominan polinomio de promedios móviles y autorregresivo, respectivamente. Evaluando estos polinomios en el operador de retardo B, se obtiene que

$$\theta(B)Z_t=(1+\theta_1 B+\ldots+\theta_q B^q)Z_t$$

$$=Z_t+\theta_1 Z_{t-1}+\ldots+\theta_q Z_{t-q}$$

y

$$\phi(B)X_t=(1-\phi_1 B-\ldots-\phi_p B^p)X_t$$

$$=X_t-\phi_1 X_{t-1}-\ldots-\phi_p X_{t-p}$$

de tal manera que las ecuaciones que satisfacen un proceso $\{X_t\}$ cuando es MA(q), AR(p) o ARMA (p, q) pueden escribirse como

$X_t=\theta(B)Z_t$, $\phi(B)X_t=Z_t$ y $\phi(B)X_t=\theta(B)Z_t$, respectivamente. Las siguientes secciones se ocupan de los problemas de existencia y unicidad de soluciones a la ecuación (2.1). Más explícitamente, se analizarán las siguientes preguntas:

Dado un ruido blanco $\{Z_t\}$ y los polinomios θ(z)= y $\phi(z)$, ¿existe un proceso estacionario $\{X_t\}$ que satisfaga (2.1)?, y en caso afirmativo ¿es única la serie $\{X_t\}$?

Existencia

En esta sección se establece un criterio suficiente para garantizar que las ecuaciones (2.1) tengan una solución $\{X_t\}$. Las condiciones involucran a las raíces del polinomio autorregresivo $\phi(z)$.

Primeramente, note que si $\phi(z)$=1, las ecuaciones (2.1) se reducen a

$$X_t=\theta(B)Z_t$$
$$=Z_t+\theta_1 Z_{t-1}+.+\theta_q Z_{t-q}, t=0\pm1\pm2,\ldots,$$

ecuaciones que claramente tienen solución única. En adelante, se supondrá que $\phi(z)$ tiene grado p>1, de manera que $\phi_p\neq0$. En este caso, $\phi(z)$ posee p raíces, las cuales (pueden repetirse y) se denotarán mediante $\xi_1,\ldots,\xi_p$:

$$\varphi(\xi_i)=0, i=1,2,\ldots,p. \qquad (3.1)$$

Debido a que $\phi(0)=1$ (vea (2.3)), el polinomio autorregresivo se factoriza como

$$\varphi(z)=(1-z/\xi_1)(1-z/\xi_2)\cdots(1-z/\xi_p)$$

$$=\prod_{i=1}^{p}\left(1-z/\xi_i^{-1}\right). \qquad (3.2)$$

Teorema 3.1. *Si las raíces del polinomio autorregresivo (z) satisfacen*

$$|\xi_i|\neq1, i=1,2,\ldots,p,$$

entonces las siguientes afirmaciones (i)-(iii) son válidas:

(i) *La función 1/(z) se expande en serie de Laurent alrededor del círculo unitario* |z|=1 (Alfhors, 1980; Rudin, 1981, y Apostol, 1980). *Más precisamente, existen constantes R_0 y R_1 con Ro<1< R_1 tales que*

$$\frac{1}{\phi(z)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi k z^k, R_0<|z|<R_1 \qquad (3.3)$$

donde la serie converge absolutamente en la región indicada:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\varphi k||z|^k<\infty, R_0<|z|<R_1$$

(ii) *Considere la sucesión $\psi=\{\psi_k, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ y el correspondiente filtro $\psi(B)$. Si la serie estacionario, $\{X_t\}$ se define como*

$$X_t=(B)\theta(B)Z_t, \; t=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

entonces $\{X_t\}$ satisface las ecuaciones ARMA *en (2.1).*

(iii) *Si $\{X_t\}$ y $\{\tilde{X}_t\}$ son dos soluciones a las ecuaciones (2.1), entonces $X_t=\tilde{X}_t$ para todo t.*

De acuerdo con este resultado, cuando las raíces de $\phi(\cdot)$ no tienen módulo 1, entonces existe un proceso estacionario que satisface las ecuaciones ARMA, y dicho proceso es único. Una demostración detallada de este teorema puede encontrarse en Brockwell y Davis (1998).

Causalidad

De acuerdo con el Teorema 3.1, cuando el polinomio autorregresivo $\phi(z)$ no tiene raíces sobre el círculo unitario, las ecuaciones $\phi(B)X_t=\theta(B)Z_t$ tienen la única solución

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{t-k} \qquad (4.1)$$

donde $\psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_k Z^k = \theta(z)/\varphi(z)$. La perturbación Z_t se manifiesta en el tiempo *t*, así que

si $\psi_k = 0$ para k<0, entonces $X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{t-k}$

y la observación X_t es una función de las perturbaciones Z_r que han ocurrido antes de *t*, o en el tiempo *t*. En contraste, si $\psi_k \neq 0$ para algún $k<0$, entonces la suma en (4.1) contiene el término $\psi_k Z_{t-k}$, en el cual $t - k > t$, indicando que Z_{t-k} se manifestará en un tiempo posterior a *t*, de modo que X_t depende de perturbaciones que surgirán en el futuro, situación que no se antoja razonable. Cuando $\psi_k = 0$ para $k < 0$, se dice que la *serie* $\{X_t\}$ *es una función causal de* $\{Z_t\}$. A partir de la demostración del Teorema 3.1, es claro que para que un coeficiente ψ_k con $k<0$ sea no nulo, es necesario y suficiente que el polinomio autorregresivo *ϕ(z)* tenga raíces dentro del círculo unitario. Por lo tanto, la causalidad del proceso $\{X_t\}$ depende sólo del polinomio autorregresivo.

Definición 4.1. *Un polinomio (z) de grado p mayor a cero se denomina causal si y sólo si todas sus raíces* $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p$ *se ubican fuera del disco unitario, esto es,*

$$|\xi_1| > 1, i = 1, 2, \dots, p$$

Debido a que determinar las raíces de un polinomio *ϕ(z)* no es, en general, una tarea sencilla es conveniente disponer de un criterio que permita decidir si el polinomio es causal o no, *sin determinar sus raíces*. En la literatura, es posible encontrar enunciado uno de tales criterios para polinomios de grado dos, el cual se discute a continuación. Como se verá después del siguiente análisis, el problema de construir un criterio para la causalidad de un polinomio es realmente interesante.

Ejemplo 4.1. En la literatura se propone el siguiente criterio para la causalidad de un polinomio

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$$

de grado dos con coeficientes reales. Para que *(z)* sea un polinomio causal es necesario (Brockwell y Davis, 1998) que los coeficientes ϕ_1, ϕ_2 satisfagan

$$\begin{aligned} &\phi_1 z + \phi_2 < 1, \\ &\phi_1 z - \phi_2 < 1, \\ &|\phi_2| < 1. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

estas condiciones se proponen como necesarias y suficientes en Shumway y Stoffer (2006).

A continuación se analizará la necesidad de las condiciones (4.2) para la causalidad de *ϕ(z)*. Como antes, las raíces de *ϕ(z)* se denotarán mediante ξ_1 y ξ_2. Utilizando $\varphi(z) = (1 - \xi_1^{-1} z)(1 - \xi_2^{-1} z)$ se desprenden las siguientes expresiones para los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2:

$$\phi_1 = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2}, \phi_1 = \frac{1}{\xi_2 \xi_1} \qquad (4.3)$$

Para verificar la necesidad de las condiciones (4.2) debe mostrarse que

$$|\xi_1| > 1 \text{ y } |\xi_2| > 1 \Rightarrow (4.2) \qquad (4.4)$$

Considere los siguientes dos casos:

Caso 1: Las raíces de *ϕ* son genuinamente complejas, en el sentido de que su parte imaginaria es no nula:

$\xi_1 = a + ib$, y $\xi_2 = a - ib$, $b \neq 0$.

En estas circunstancias

$$\phi_1 = \frac{1}{a+ib} + \frac{1}{a-ib} = \frac{2a}{a^2+b^2}, \phi_2$$

$$= -\frac{1}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{1}{a^2+b^2}$$

así que

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{2a+1}{a^2+b^2}$$

Observe ahora que

$$\varphi_1 - \varphi_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{a^2+b^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2a + 1 < a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a < (a-1)^2 + b^2$$

Así, si (4.4) ocurre, entonces debe tenerse la siguiente implicación:

$$a^2+b^2>1 \Rightarrow 2<(a-1)^2+b^2 \cdot$$

Sin embargo, poniendo a=1.01 y b=0.01 se sigue que $a^2+b^2>1$ y $(a-1)^2+b^2=0.0002<2$, de manera que la implicación anterior no se satisface, por lo tanto en el caso actual, la afirmación (4.4) *no es correcta*.

Caso 2: Las raíces ξ_1 y ξ_2 son reales. En este contexto se analizarán tres casos exhaustivos.

(i) $\xi_1>0$ y $\xi_2>0$.

En esta situación, si (4.4) es válida, entonces la siguiente afirmación es correcta:

$$\xi_1>1 \text{ y } \xi_2>1 \Rightarrow \varphi_1-\varphi_2<1$$

Por medio de (4.3) esto es equivalente a

$$\xi_1>1 \text{ y } \xi_2>1 \Rightarrow \frac{\xi_2+\xi_1+1}{\xi_1\xi_2}<1$$

Sin embargo, poniendo $\xi_1=2=\xi_2$, no es difícil ver que la anterior implicación es falsa. En consecuencia, (4.4) falla también en el contexto actual.

(ii) $\xi_1<0$ y $\xi_2<0$. En estas condiciones, $\xi_1\xi_2>0$ y

$$\left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1-\phi_2=\dfrac{\xi_2+\xi_1+1}{\xi_1\xi_2}<\dfrac{\xi_1}{\xi_1\xi_2}=\dfrac{1}{\xi_2}<0<1 \\[2ex] \phi_1+\phi_2=\dfrac{\xi_2+\xi_1-1}{\xi_1\xi_2}<\dfrac{\xi_1}{\xi_1\xi_2}=\dfrac{1}{\xi_2}<0<1 \\[2ex] |\phi_2|=\dfrac{1}{\xi_1\xi_2}=\dfrac{1}{\xi_1\xi_2}<1 \end{cases}$$

Así, (4.4) ocurre en el presente contexto.

(iii) Las raíces son reales con diferente signo. En este caso $\xi_1\xi_2<0$ y, sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $\xi_1<0$ y $\xi_2<0$.

Note ahora que

$$\xi_1<-1 \text{ y } \xi_2>1 \Rightarrow \phi_2<0 \, y \, |\phi_2|=\frac{1}{|\xi_1|\xi_2}<1$$

$$\xi_1<-1 \text{ y } \xi_2>1 \Rightarrow \xi_1\xi_2<0, \xi_2>1 \text{ y } \xi_1+\xi_2+1>\xi_1$$

$$\Rightarrow \xi_2>1 \text{ y } \frac{\xi_2+\xi_1+1}{\xi_1\xi_2}<\frac{1}{\xi_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_2+\xi_1+1}{\xi_1\xi_2}<1$$

$$\Rightarrow \phi_1-\phi_2<1$$

$$\Rightarrow \phi_1+\phi_2<1$$

donde la penúltima implicación se debe a (4.3), y la desigualdad $\phi_2<0$ fue utilizada en el último paso. Las dos últimas relaciones desplegadas implican que (4.4) ocurre en las presentes circunstancias.

Integrales sobre el círculo unitario

El criterio de causalidad para un polinomio *(z)* que se presenta en la siguiente sección involucra la idea de integral de una función sobre el círculo de radio 1 en el plano complejo, concepto que se introduce a continuación. Primeramente, defina

$$C=\{z \mid z \text{ es un número complejo con } |z|=1\}.$$

Definición 5.1. *Dada una función continua, $f(\cdot)$ sobre el círculo C, la integral de f sobre C se denota mediante $\int_C f(z)\ dz$ y se define como*

$$\int_C f(z)\ dz=\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\, e^{i\lambda} d\lambda$$

La racionalidad detrás de esta especificación proviene de la observación de que, cuando λ varía en $(-\pi, \pi]$, el punto $z=e^{i\lambda}=\cos(\lambda)+i\sin(\lambda)$ recorre todo el círculo C una vez y $dz/d\lambda=ie^{i\lambda}$. Note que si f y g son dos funciones continuas definidas en C, entonces para todos los números complejos a y b

$$\int_C [af(z)+bg(z)]\,dz = a\int_C f(z)dz+b\int_C g(z)dz$$

es decir, la integral sobre C es una transformación lineal, y

$$\left|\int_c f(z)dz-\int_c g(z)dz\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\lambda})-g(e^{i\lambda})|\,d\lambda; \quad (5.1)$$

vea, por ejemplo, Apostol (1980), o Royden (2003). Ahora se ilustrará esta idea en un caso muy simple y útil.

Ejemplo 5.1. Si n es un entero y $f(z)=z^n$, entonces $f(e^{i\lambda})=e^{in\lambda}$ y entonces

$$\int_C z^n dz=i\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}e^{i\lambda}\quad d\lambda=i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)\lambda} d\lambda$$

Por lo tanto, si $n \neq -1$, utilizando la función $\lambda \mapsto e^{i\lambda}$ tiene periodo 2π,

$$\int_C z^n \, dz = \left. \frac{e^{i(n+1)\lambda}}{(n+1)} \right| = e^{i(n+1)\pi} - e^{-i(n+1)\pi} = 0,$$

mientras que

$$\int_C z^{-1} \, dz = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\lambda} \, d\lambda = i \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda = 2\pi i.$$

En consecuencia

$$\int_C z^n dz = \begin{cases} 0, & si \quad n \neq -1, \\ 2\pi i & si \quad n = 1; \end{cases} \tag{5.2}$$

particularmente si $P(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_k z^k$ es un polinomio arbitrario de grado k, entonces $\int_C P(z)dz = 0$.

Criterio de causalidad

En esta sección se utiliza la idea de integral sobre el círculo unitario para obtener una fórmula para el número de raíces de un polinomio arbitrario $\phi(z)$, que se ubican dentro del círculo unitario. Primeramente, sean $a_1, a_2, \ldots, a_d$ las raíces diferentes de $\phi(z)$, de tal manera que

$$\phi(z) = c(z - a_1)^{m_1} \ldots . \; (z - a_d)^{md} = c \prod_{i=1}^{d} (z - a_i)^{m_1} \tag{6.1}$$

donde m, es la multiplicidad de la raíz a_i de modo que

$$k = m_i + \cdots + m_d$$

es el grado del polinomio, y $c = (-1)^k \phi(0) / [a_1^{m_1} \ldots a_d^{m_d}]$. Contando las multiplicidades, el número de raíces de $\phi(z)$ que se ubican dentro del círculo unitario es

$$\sum_{i:|a_i|<1} m_i,$$

y el siguiente resultado establece que dicho número puede expresarse mediante una integral sobre el círculo unitario.

Teorema 6.1. *Si $\phi(z)$ es un polinomio con raíces distintas $a_1, a_2, \ldots a_d$, cada una con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots m_d$, respectivamente (como en (6.1)), y si $\phi(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z|=1$, entonces*

(i) $$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = \sum_{i:|a_i|<1} m_i$$

Por lo tanto,

(ii) *El polinomio (z) es causal si, y sólo si,*

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = 0.$$

La expresión en la parte (i) de este teorema es conocida en la teoría de funciones de variable compleja, y se desprende de forma directa de la denominada fórmula de Cauchy (Alfhors, 1980; Rudin, 1984); sin embargo, hasta el mejor de los conocimientos del autor, esta idea no se ha usado directamente en el análisis de series de tiempo. Antes de abordar la demostración del Teorema 6.1 en forma general, primero se estudiará un caso particular sencillo.

El caso de un polinomio lineal

Considere un polinomio *(z)* de grado 1, de tal manera que $\phi(\cdot)$ se escribe como

$$(z) = c(z - a)$$

donde a es la única raíz de $\phi(z)$. En este caso $\phi'(z) = c$ y entonces

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi(z)} = \frac{c}{c(z-a)} = \frac{1}{z-a}$$

de manera que

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = \int_C \frac{1}{z-a} dz$$

Usando esta relación, la parte (i) del Teorema 6.1 establece que, si $|a| \neq 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-a} dz = \begin{cases} 1, & si \quad |a| < 1 \\ 0, & si \quad |a| > 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

El objetivo de esta sección es verificar esta expresión.

Lema 7.1. *Si $|a| \neq 1$, entonces la fórmula (7.1) es válida.*

Demostración. Suponga que $|a|<1$. En este caso, para cada z tal que $|z|=1$ se tiene que

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1}$$

donde la segunda igualdad se debe a la expansión $\left(\frac{1}{1-r}=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right)$ aplicada al caso $r=az^{-1}$; recuerde que $|z|=1$ y note que $|r| = |az^{-1}| =|a|<1$, de manera que la aplicación de $\left(\frac{1}{1-r}=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right)$ es legítima. Ahora, defina $S_n(z)$ como la n-ésima suma parcial de la serie anterior, esto es,

$$s_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} \tag{7.2}$$

y observe que

$$\left|\frac{1}{z-a}=s_n(z)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a^k z^{-k-1}\right|\leq\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}|a|^k\right|=\frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}.$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad (5.1) se desprende que

$$\left|\int_C \frac{1}{z-a}dz- \int_C S_n(z)dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}d\lambda$$

$$= 2\pi\frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}.$$

y tomando límite conforme n tiende a ∞, esta relación implica que

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \lim_{n\to\infty}\int_C S_n(z)dz \tag{7.3}$$

Observe ahora que para cada entero positivo n

$$s_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} = z^{-1}+az^0+a^2z+\cdots+a^nz^{-n-1},$$

de tal modo que

$$\int_c S_n(z)dz = \int_c z^{-1}dz + a\int_c z^0dz + a^2\int_c zdz+\cdots$$

$$+a^n\int_c z^{-n-1}dz;$$

utilizando la igualdad (5.2) establecida en el Ejemplo 5.1, es claro que todas las integrales en el lado derecho se anulan, excepto la primera que es igual a 2πi, y, por lo tanto, $\int_C S_n(z)dz = 2\pi i$ combinando esta relación con (7.3) se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{1}{z-a}dz = 1 \qquad cuando \qquad |a|<1,$$

de conformidad con (7.1).

Suponga que $|a|>1$. En esta circunstancia observe que para cada z tal que $|z|=1$ se tiene que

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{a}\frac{1}{1-za^{-1}}=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}z^k a^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k a^{-k-1}$$

donde, como antes, la segunda igualdad se debe a la expansión $\left(\frac{1}{1-r}=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right)$ aplicada al caso $r = zar^{-1}$; note que, como $|z|=1$, se tienen las relaciones $|r|=|za^{1}| = |a^{1}|<1$, de manera que la aplicación de $\left(\frac{1}{1-r}=\sum_{k=0}^{\infty} r^k\right)$ es posible. Procediendo de manera similar al caso anterior, defina $S_n(z)$ como la n-ésima suma parcial de la serie que aparece en el desplegado precedente, es decir,

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} z^k a^{-k-1} \tag{7.4}$$

y note que

$$\left|\frac{1}{z-a}-S_n(z)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} z^k a^{-k-1}\right|\leq\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}|a|^{-k-1}\right|=\frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}}$$

Combinando esta relación con la desigualdad (5.1), se concluye que

$$\left|\int_c \frac{1}{z-a}dz-\int_c S_n(z)dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}}d\lambda$$

$$=2\pi\frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}},$$

y tomando el límite conforme n tiende a ∞, esto implica que

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \lim_{n\to\infty}\int_C S_n(z)dz \tag{7.5}$$

Para concluir, note que para cada entero positivo n

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} = z^0a^{-1}+za^0+z^2a+$$

$$\cdots+z^na^{-n-1},$$

de tal modo que

$$\int_c S_n(z)dz = a^{-1}\int_c z^0dz + a^0\int_c z \quad dz + a^1\int_c z^2dz$$

$$+\ldots+a^{-n-1}\int_c z^ndz;$$

utilizando de nueva cuenta la igualdad (5.2) establecida en el Ejemplo 5.1, es claro que todas las integrales del lado derecho se anulan, y entonces $\int_C S_n(z)dz = 0$; combinando esta relación c (7.5) se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{1}{z-a}dz = 0 \qquad cuando \qquad |a| > 1,$$

completando la verificación de (7.1).

EL CASO GENERAL

En esta sección se establecerá el Teorema 6.1 para un polinomio arbitrario $\phi(\cdot)$ de grado positivo.

Demostración del Teorema 6.1. Factorice (z) como en (6.1), y suponga que ninguna de las raíces diferentes ai tiene módulo 1. A partir de la relación

$$\phi(z) = c\prod_{i=1}^{d}(z-a_i)^{m_i}$$

la fórmula para la derivada de un producto permite concluir que

$$\phi'(z) = c\frac{d}{dz}\prod_{1\le i\le d}(z-a_i)^{m_i}$$

$$= cm_1(z-a_1)^{m_1-1}\prod_{2\le i\le d}(z-a_i)^{m_i}$$

$$+ cm_2(z-a_2)^{m_2-1}\prod_{1\le i\ne 2, i\le d}(z-a_i)^{m_i}$$

$$+ cm_3(z-a_3)^{m_3-1}\prod_{1\le i\ne 3, i\le d}(z-a_i)^{m_i}$$

$$+\cdots$$

$$+ cm_d(z-a_d)^{m_d-1}\prod_{1\le i\ne d, i\le d}$$

y entonces

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \sum_{i=1}^{d}\frac{m_1}{z-a_i}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz = \sum_{i=1}^{d} m_i \int_C \frac{1}{z-a_i}dz$$

y combinando esta igualdad con el Lemma 7.1, se desprende que

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz = \sum_{i:|a_i|<1} m_i$$

estableciendo la parte (i), y a partir de este punto la parte (ii) se obtiene de inmediato.

Implementación del criterio

El Teorema 6.1 expresa la cantidad de raíces de un polinomio que se ubican dentro del círculo unitario mediante una integral y, por supuesto, la gran ventaja de la fórmula establecida en el Teorema 6.1 (i) es que la integral puede calcularse, al menos aproximadamente, sin conocer las raíces. Para propósitos de ilustración, a continuación se muestra la implementación de un algoritmo para evaluar el número de raíces de un polinomio que tienen módulo menor a uno. Para empezar, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\phi'(e^{i\lambda})}{\phi(e^{i\lambda})}ie^{i\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\phi'(e^{i\pi w})}{\phi(e^{i\pi w})}ie^{i\pi w}dw\end{aligned} \qquad (9.1)$$

donde la segunda igualdad se obtuvo a través del cambio de variable λ=πw. Para calcular esta última integral se utilizó el lenguaje R. La idea del procedimiento es la siguiente:

Primero, se formuló una función que permite evaluar un polinomio de grado mayor o igual a 1 en cualquier punto deseado x. Dicha función se denominó evalpol, y acepta dos argumentos: el primero es un vector $p = (p_o, p_1, \ldots, p_n)$ que corresponde a los coeficientes del polinomio

$$p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$$

para el cual se desea determinar el número de raíces dentro del círculo unitario. El segundo argumento es un número x, y la función devuelve el valor $p(x)$, que se calcula de manera anidada como sigue:

$$p(x) = x*(*(\cdots(x*(x*(p_n*x+p_{n-1})+p_{n-2})+$$
$$+p_{n-3})\cdots+p_1)+p_0$$

El código de la función es el siguiente:

```
evalpol<-function(p, x) {
n<-length (p)
```

```
suma<-p[n]
for(i in ((n-1):1))
suma2<-suma*x + p[i]
suma }
```

Posteriormente, se define una función que calcula la mitad de la integral en (9.1) de manera aproximada mediante una suma de Riemman:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\phi'(e^{i\pi w})}{\phi(e^{i\pi w})}\,ie^{i\pi w}dw \approx \frac{1}{2}\sum_{i}\frac{\phi'(e^{i\pi w})}{\phi(e^{i\pi w})}\,ie^{i\pi w}\Delta$$

donde dos puntos sucesivos w_{i+1} y w_i están separados por una distancia Δ, y además, $w_i = -\pi$ y $w_i = \pi - \Delta$. El código de la función aparece a continuación:

```
Criterio<–function(p, Delta= .001) {
n<-length (p)-l
derp <- p[2: (n+1)] *(l:n)
puntos <- seq(-l, 1, by= Delat)
puntos <- puntos*pi*li
puntos <- exp(puntos)
N<- length (puntos)
SUMA <- 0i
for (i in (1:N))) {
SUMA <- SUMA+
Delta*(exp(puntos[i])*evalpol(derp,
puntos[i])/evalpol(p,puntos[i]))
}
cat ("El polinomio tiene",
ceiling(trunc(Mod(SUMA/2)+.5)),
"raíces dentro del círculo unitario\n")
}
```

Note que se incluyó un valor por defecto para Δ, y que dicho valor es un milésimo.

Para ver la aplicación de esta función, a continuación se analizarán algunos polinomios:

(a) $p(z) = .4+z^3$. Este polinomio corresponde al vector de coeficientes $p = (.4, 0, 0,1)$. Invocando a la función Criterio con este argumento, se obtiene

```
> Criterio (c (.4, 0, 0, 1))
```

El polinomio tiene tres raíces dentro del círculo unitario

(b) Ahora se altera ligeramente el polinomio anterior para obtener $p(z) = .4+.2z+z^3$, polinomio que corresponde al vector

$p = (.4, .2, 0, 1)$.

La aplicación de la función Criterio con este argumento, da

```
> Criterio(c (.4, .2, 0, 1))
```

El polinomio tiene tres raíces dentro del círculo unitario.

La implementación del criterio de causalidad presentada arriba es simple y se formuló para propósitos de ilustración, pero muestra que es posible aplicar el Teorema 6.1 de manera práctica para determinar la causalidad de un polinomio sin conocer sus raíces.

LITERATURA CITADA

Ahlfors, L. 1980. Complex Analysis. McGraw-Hill, New York.

Apostol, T. M. 1980. Mathematical Analysis. Addison Wesley, Reading, Massachusetts.

Borovkov, A. A. 1999. Mathematical Statistics. Gordon and Breach, New York.

Brockwell, P. J. and R. A. Davis. 1998. Time Series: Theory and Methods. Springer-Verlag, New York.

Dudewica, E. and S. Mishra. 1998. Mathematical Statistics. Wiley, New York.

Fuller, W. A. 1988. Introduction to Statistical Time Series. Wiley, New York.

Fulks, W. 1980. Cálculo Avanzado. Limusa, México.

Graybill, F. A. 2000. Theory and Application of the Linear Model. Duxbury, New York.

Graybill, F. A. 2001. Matrices with Applications in Statistics. Duxbury, New York.

Rudin, W. 1984. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York.

Royden, H. L. 2003. Real Analysis. MacMillan, London.

Shao, J. 2010. Mathematical Statistics. Springer, New York.

Shumway, R. H. and D. S. Stoffer. 2006. Time Series Analysis and Its Applications with R Examples. Springer-Verlag, New York.

Wackerly, D., W. Mendenhall and R. L. Scheaffer. 2009. Mathematical Statistics with Applications. Prentice-Hall, New York.